ТЕМА: ПРАКТИКА ИЗУЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ В 11 КЛАССЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

Выступление на ГМО учителей математики г.о. Серпухов учителя математики МБОУ «Оболенская СОШ» Харбих Т.С.

21 ноября **2024** года

Система практических работ по решению уравнений (неравенств) с параметром

1.1 Решение линейных уравнений с параметром

1.2 Решение линейных неравенств с параметром

2.1 Решение квадратных уравнений с параметром

2.2 Решение квадратных неравенств с параметром

3.1 Решение дробных рациональных уравнений с параметром

3.2 Решение дробных рациональных неравенств с параметром

4.1 Решение иррациональных уравнений с параметром

4.2 Решение иррациональных неравенств с параметром

5.1 Решение показательных уравнений с параметром

5.2 Решение показательных неравенств с параметром

Система практических работ по решению уравнений (неравенств) с параметром

Индивидуальные карточки
(8 вариантов, 2 прототипа)

Ответы к индивидуальным карточкам
(рисунки на оси параметра)

Решения заданий первого прототипа
(1-4 варианты)

Карточки-консультанты для учащихся
(теория и образец)

Индивидуальные карточки с заданиями

5.2.1	5.2.5
1) $a^{x^2-x} < a^2$ и $a^{x^2-x} \geq a^2$	1) $a^{x^2+5x} \geq a^6$ и $a^{x^2+5x} < a^6$
2) $a^{x+1} - a^{x-1} \leq 1$ и $a^{x+1} - a^{x-1} > 1$	2) $a^{x-5} - a^{x+5} > 5$ и $a^{x-5} - a^{x+5} \leq 5$
3) $2^x - 1 < \frac{a \cdot 2^x}{1-a}$ и $2^x - 1 \geq \frac{a \cdot 2^x}{1-a}$	3) $6^x + 5 < \frac{a \cdot 6^x}{5-a}$ и $6^x + 5 \geq \frac{a \cdot 6^x}{5-a}$
4) $\sqrt{a-2} \cdot 4^x + \sqrt{a-2} \leq (a-1) \cdot 2^x$	4) $\sqrt{6-a} \cdot 4^x - (a-5) \cdot 2^x \leq \sqrt{6-a}$
5) $\sqrt{a-2} \cdot 4^x + \sqrt{a-2} > (a-1) \cdot 2^x$	5) $\sqrt{6-a} \cdot 4^x - (a-5) \cdot 2^x > \sqrt{6-a}$

Ответы к индивидуальным карточкам

	1.1.1	
1	$(a^2-1)x=0$ $\begin{cases}(a-1)(a+1)x=0,\\ a\in R\end{cases}$	x_1 — -1 (R) — x_1 — 1 (R) — $x_1=0$ — a
2	$a^2x-a=1-ax$ $\begin{cases}a(a+1)x=a+1,\\ a\in R\end{cases}$	x_1 — -1 (R) — x_1 — 0 ($\varnothing$) — $x_1=\frac{1}{a}$ — a
3	$x-(x-1)=a(x+1)$ $\begin{cases}ax=1-a,\\ a\in R\end{cases}$	x_1 — 0 ($\varnothing$) — $x_1=\frac{1-a}{a}$ — a
4	$\frac{a^2}{1+a}-\frac{1}{a+1}+x(a-1)=0$ $\begin{cases}(a-1)x=-(a-1),\\ a\neq -1\end{cases}$	x_1 — -1 — x_1 — 1 (R) — $x_1=-1$ — a
5	$x=\frac{1+a}{a^2+a}+\frac{x}{a}$ $\begin{cases}(a-1)x=1,\\ a\neq 0, a\neq -1\end{cases}$	x_1 — -1 — x_1 — 0 — x_1 — 1 ($\varnothing$) — $x_1=\frac{1}{a-1}$ — a
6	$\sqrt{a+1}\cdot x=1-a^2$ $\begin{cases}\sqrt{a+1}\cdot x=(1-a)(1+a);\\ a\geq -1\end{cases}$	-1 (R) — $x_1=(1-a)\sqrt{1+a}$ — a

	1.1.5	
1	$(a^2+5a)x=0$ $\begin{cases}a(a+5)x=0;\\ a\in R\end{cases}$	x_1 — -5 (R) — x_1 — 0 (R) — $x_1=0$ — a
2	$a^2x+5=a+25x$ $\begin{cases}(a-5)(a+5)x=a-5;\\ a\in R\end{cases}$	x_1 — -5 ($\varnothing$) — x_1 — 5 (R) — $x_1=\frac{1}{a+5}$ — a
3	$a-5(x-2)=x(a+5)$ $\begin{cases}(a+10)x=a+10;\\ a\in R\end{cases}$	x_1 — -10 (R) — $x_1=1$ — a
4	$\frac{a^2}{5-a}+\frac{25}{a-5}=x(a+5)$ $\begin{cases}(a+5)x=-(a+5);\\ a\neq 5\end{cases}$	x_1 — -5 (R) — x_1 — 5 — $x_1=-1$ — a
5	$x=\frac{5x}{a}-\frac{5+a}{a^2+5a}$ $\begin{cases}(a-5)x=-1;\\ a\neq 0, a\neq -5\end{cases}$	x_1 — -5 — x_1 — 0 — x_1 — 5 ($\varnothing$) — $x_1=\frac{1}{5-a}$ — a
6	$\sqrt{5-a}\cdot x=a^2-25$ $\begin{cases}\sqrt{5-a}\cdot x=(a-5)(a+5);\\ a\leq 5\end{cases}$	$x_1=-(5+a)\sqrt{5-a}$ — 5 (R) — a

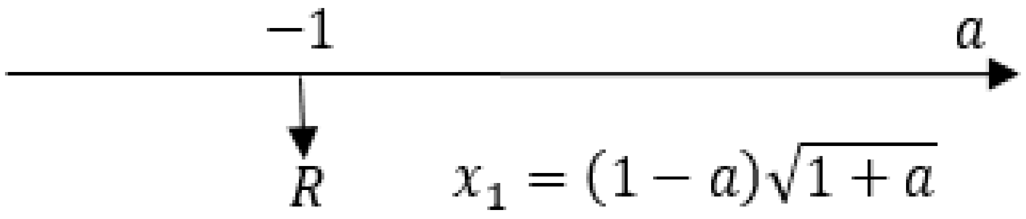
Решения заданий первого прототипа

6) $\sqrt{a+1}\cdot x = 1 - a^2.$

Решение:

$$\begin{cases} A: \sqrt{a+1}\cdot x = 1 - a^2, \\ a \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A, \\ \left[\begin{array}{l} a = -1; \\ a > -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -1, \\ 0x = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a > -1, \\ x = \dfrac{1-a^2}{\sqrt{a+1}} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -1, \\ x \in R; \end{cases} \\ \begin{cases} a > -1, \\ x = (1-a)\sqrt{1+a}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ:



МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение показательных уравнений с параметром методом замены переменной

Теоретический материал

Определение:

показательным относительно неизвестной величины x называют уравнение, в котором x находится в показателе степени.

Алгоритм решения показательного уравнения с параметром методом замены переменной:

1) Привести уравнение к виду
$$h(a)t^2 + p(a)t + k(a) = 0,$$
где $t = b^{f(x)} > 0, b > 0, b \neq 1$;
2) Найти допустимые значения параметра;
3) Если $h(a) = 0$, рассмотреть линейное уравнение $p(a)x + k(a) = 0$ и решить его, поделив обе части уравнения на $p(a) \neq 0$ (не забыв рассмотреть случай, когда $p(a) = 0$); при этом учитывая тот факт, что $t > 0$;
4) Если $h(a) \neq 0$, вычислить дискриминант
5) $D = p^2(a) - 4h(a)k(a)$, сравнить его с нулем и определить, при каких значениях параметра a уравнение имеет два различных корня ($D > 0$ и оба корня положительны), имеет единственный корень ($D = 0$ и этот корень положителен или $D > 0$ и корни уравнения имеют разные знаки) или не имеет корней (во всех остальных случаях, включая случай $D < 0$;
6) В случае $D \geq 0$ найти корни квадратного уравнения по формуле: $t_{1,2} = \frac{-p(a) \pm \sqrt{D}}{2h(a)}$;
7) Вернуться к переменной x и записать количество и вид корней уравнения в зависимости от всех допустимых значений параметра.

Примечание:

если дискриминант квадратного уравнения не является полным квадратом, необходимо применять теоремы о взаимном расположении корней квадратного трехчлена $f(t)$ относительно некоторого числа $t = \beta$.

Примеры применения теории на практике

$$\boxed{a \cdot 4^x + (a-3) \cdot 2^x - 3 = 0}$$

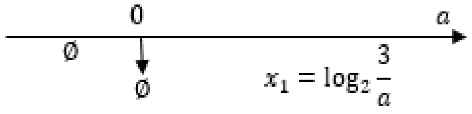
$$\begin{cases} t = 2^x, t > 0, \\ at^2 + (a-3)t - 3 = 0, \\ a \in R \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 2^x, t > 0, \\ at^2 + (a-3)t - 3 = 0, \\ \left[\begin{array}{l} a = 0; \\ a \neq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0, \\ t = 2^x = -1; \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 0, \\ t = 2^x, t > 0, \\ at^2 + (a-3)t - 3a = 0, \\ D = (a-3)^2 + 12a = (a+3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 0, \\ t = 2^x, t > 0, \\ at^2 + (a-3)t - 3 = 0, \\ D = (a-3)^2 + 12a = (a+3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases} \\ \begin{cases} t = 2^x, t > 0, \\ at^2 + (a-3)t - 3a = 0, \\ \left[\begin{array}{l} D = 0; \\ D \neq 0 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases} \\ \begin{cases} a = -3, \\ at^2 + (a-3)t - 3 = 0, \\ t = 2^x = \dfrac{-(-3)+3}{2 \cdot (-3)} = -1 < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq -3, \\ t^2 + (a-3)t - 3a = 0, \\ t = 2^x, t > 0, \\ \left[\begin{array}{l} t = -1; \\ t = \dfrac{3}{a} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases} \\ \begin{cases} a = -3, \\ x \in \emptyset; \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq -3, a \neq 0, \\ 2^x = -1 < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq -3, a \neq 0, \\ 2^x = \dfrac{3}{a}, \\ \left[\begin{array}{l} a > 0; \\ a < 0 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0, \\ x \in \emptyset; \end{cases} \\ \begin{cases} a = -3, \\ x \in \emptyset; \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0; \\ x \in \emptyset; \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0, \\ x = \log_2 \frac{3}{a}. \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ:

при $a > 0$ $\quad x = \log_2 \frac{3}{a}$;

при $a \leq 0$ $\quad x \in \emptyset$.

Сделай сам

$$4^x - (5a-3) \cdot 2^x + 4a^2 - 3a = 0$$

при $a \leq 0$ $\quad x \in \emptyset$;

при $a = \frac{3}{4}$ $\quad x = \log_2 \frac{3}{4}$;

при $a = 1$ $\quad x = 0$;

при $0 < a < \frac{3}{4}$ $\quad x = \log_2 a$;

при $\left[\begin{array}{l} a > \frac{3}{4}; \\ a \neq 1 \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x_1 = \log_3 a; \\ x_2 = \log_3(4a-3). \end{array}\right.$

$$a \cdot 4^x - (3a-2) \cdot 2^{x+1} + 5a - 4 = 0$$

при $\left[\begin{array}{l} 0 \leq a \leq \frac{4}{5}; \\ a = 1 \end{array}\right.$ $\quad x = 0$;

при $\left[\begin{array}{l} a < 0; \\ a > 1 \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x_1 = 0; \\ x_2 = \log_2 \frac{5a-4}{a}. \end{array}\right.$

$$4^x - 2^{x+2} + a = 0$$

при $a > 4$ $\quad x \in \emptyset$;

при $a \leq 0$ $\quad x = \log_2(2 + \sqrt{4-a})$;

при $0 < a < 4$ $\quad x_{1,2} = \log_2(2 \pm \sqrt{4-a})$;

при $a = 4$ $\quad x = 1$.

Методика обучения решению уравнений (неравенств) с параметром

1. Урок объяснения нового материала
(разбор решений уравнения и соответствующих ему неравенств)

2. Закрепление нового материала на уроке
(обучающая самостоятельная работа по решению уравнений)

3. Закрепление нового материала дома
(использование рубрики «Сделай сам» в КАРТОЧКЕ-консультанте)

4. Контрольная работа по решению уравнений (неравенств),
где параметры присутствуют ТОЛЬКО в заданиях на «5-ку»

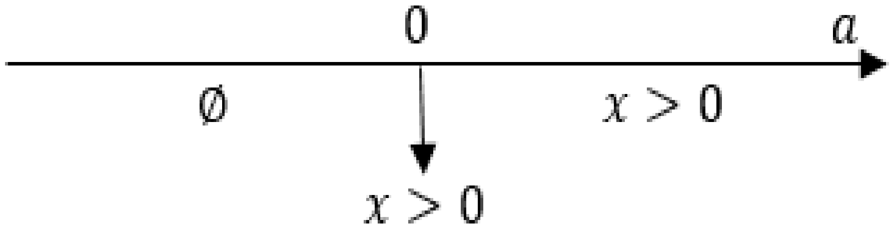
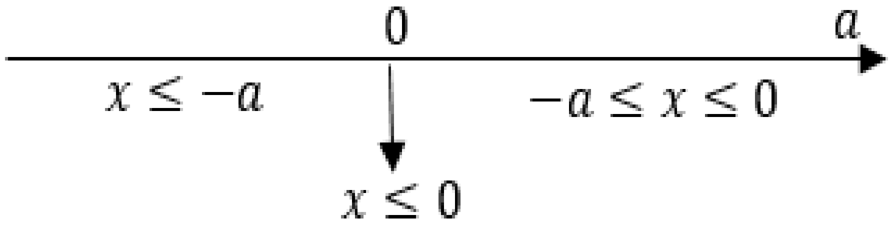
Задания по решению иррациональных уравнений (неравенств) БАЗОВОГО уровня сложности

Проверка:

<table>
<tr><td>$\sqrt{(a+1)x+1} < 1$</td><td>$\sqrt{(a+1)x+1} \geq 1$</td><td>ОДЗ неравенств</td></tr>
<tr><td>-1 a
$0 < x \leq -\frac{1}{a+1}$ $\emptyset$ $-\frac{1}{a+1} \leq x < 0$</td><td>$-1$ a
$x \leq 0$ R $x \geq 0$</td><td rowspan="2">$(a+1)x+1 \geq 0$
$(a+1)x \geq -1$
При $a < -1$:
$x \leq -\frac{1}{a+1}$;
При $a = -1$:
$0x \geq -1$
$x \in R$;
При $a > -1$:
$x \geq -\frac{1}{a+1}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">-1 a
$x \leq -\frac{1}{a+1}$ R $x \geq -\frac{1}{a+1}$</td></tr>
</table>

Задания по решению иррациональных уравнений (неравенств) ПРОФИЛЬНОГО уровня сложности

Проверка:

$\sqrt{a(x+a)} < x + a$	$\sqrt{a(x+a)} \geq x + a$
	

Объединение решений неравенств:

При $a < 0$:

$$\left[\begin{array}{l} x \in \emptyset; \\ x \leq -a \end{array}\right. \Leftrightarrow x \leq -a$$

При $a = 0$:

$$\left[\begin{array}{l} x > 0; \\ x \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in R$$

При $a > 0$:

$$\left[\begin{array}{l} x > 0; \\ -a \leq x \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \geq -a$$

Область определения неравенств:

При $a < 0$:

$$\begin{cases} a < 0, \\ a(x+a) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -a$$

При $a = 0$:

$$\begin{cases} a = 0, \\ a(x+a) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in R$$

При $a > 0$:

$$\begin{cases} a > 0, \\ a(x+a) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -a$$