Тригонометрические уравнения. Отбор корней

Учитель математики МБОУ СОШ №18 г.о.Серпухов

Андрианова Наталья Владимировна

Отбор корней с учетом ОДЗ

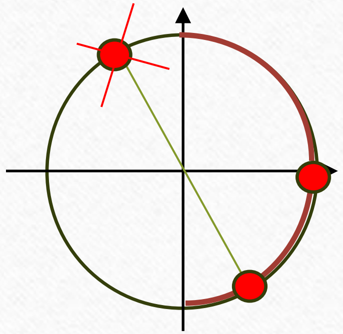
Исключение области

$$(\cos x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})\sqrt{\cos x} = 0$$

$$\cos x > 0$$

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x - 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 1, \\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi k, \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z}$$



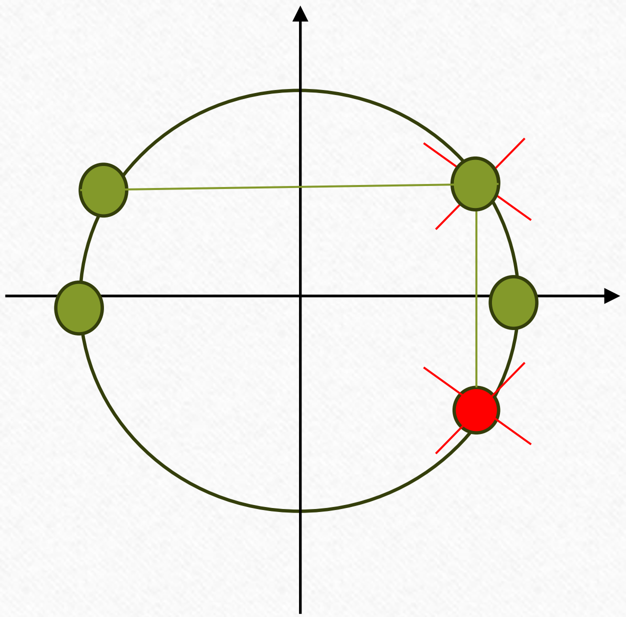
Ответ: $2\pi k, \ -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k: \ k \in \mathbb{Z}$

Исключение точек

$$\frac{2\sin^2 x - \sin x}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$$

$$\cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Ответ: $\pi k, \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k \ : k \in \mathbb{Z}$

Отбор корней, принадлежащих отрезку

$$\sin^2\frac{2x}{3}+2\sin\frac{2x}{3}\sin\frac{x}{3}+1=\cos^2\frac{x}{3}$$

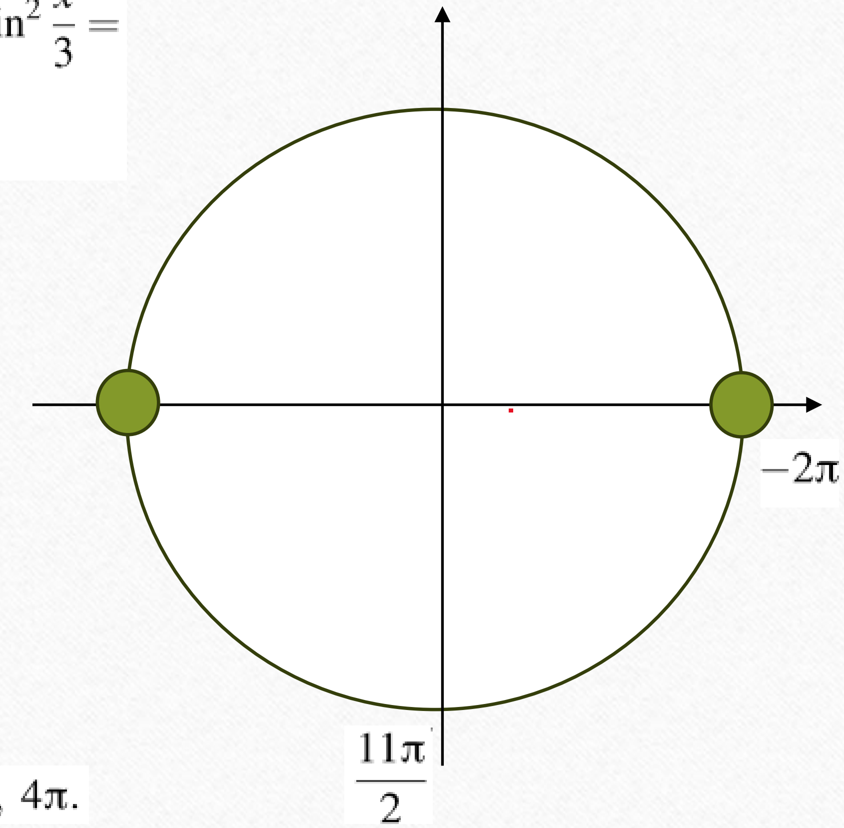
Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ \frac{11\pi}{2}\right]$.

$$\sin^2\frac{2x}{3}+2\sin\frac{2x}{3}\sin\frac{x}{3}+\left(1-\cos^2\frac{x}{3}\right)=4\sin^2\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3}+4\sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\sin^2\frac{x}{3}=$$
$$=\sin^2\frac{x}{3}\left(4\cos^2\frac{x}{3}+4\cos\frac{x}{3}+1\right)=\sin^2\frac{x}{3}\left(2\cos\frac{x}{3}+1\right)^2.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{3}=0,\\ \cos\frac{x}{3}=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{3}=\pi k,\\ \frac{x}{3}=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\pi k,\\ x=2\pi+6\pi l,\\ x=-2\pi+6\pi m,\end{array}\right.\quad k,l,m\in\mathbb{Z}.$$

$$\left[\begin{array}{l}-2\pi\leqslant 3\pi k\leqslant\frac{11\pi}{2},\\ -2\pi\leqslant 2\pi+6\pi l\leqslant\frac{11\pi}{2},\\ -2\pi\leqslant -2\pi+6\pi m\leqslant\frac{11\pi}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{2}{3}\leqslant k\leqslant\frac{11}{6},\\ -\frac{2}{3}\leqslant l\leqslant\frac{7}{12},\\ 0\leqslant m\leqslant\frac{15}{12}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=0,\\ k=1,\\ l=0,\\ m=0,\\ m=1.\end{array}\right.$$

Найденным значениям k, l и m соответствуют корни: $-2\pi,\ 0,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi.$



$6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$ Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

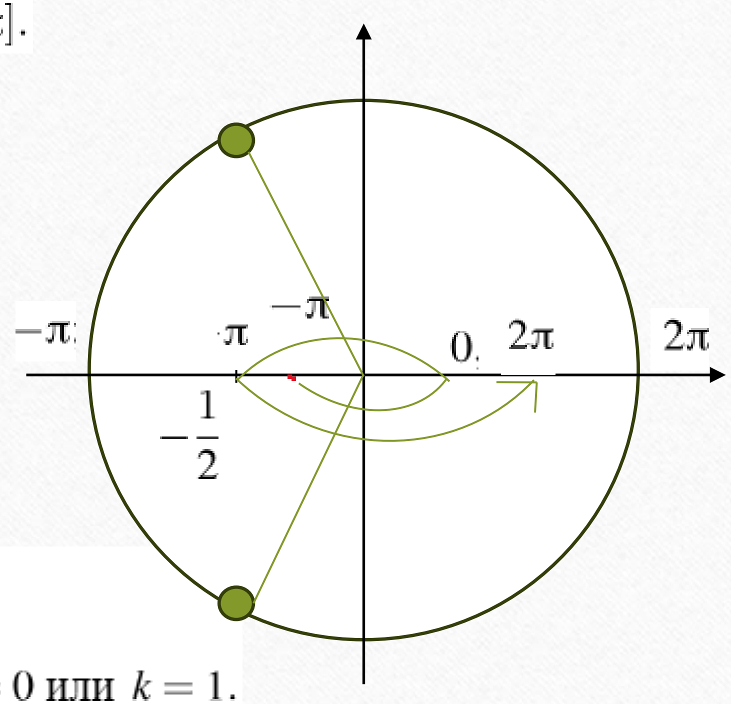
$\cos x = y$.

$6y^2 - 7y - 5 = 0$.

$y = \frac{5}{3}$ и $y = -\frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{5}{3}$ $\cos x = -\frac{1}{2}$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \text{ или } x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$



Найдем корни, принадлежащие отрезку $[-\pi;\ 2\pi]$. Решим неравенства:

$$-\pi \leqslant -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leqslant 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leqslant k \leqslant \frac{4}{3}, \text{ откуда } k = 0 \text{ или } k = 1.$$

$$-\pi \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leqslant 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{6} \leqslant k \leqslant \frac{2}{3} \Leftrightarrow k = 0.$$

Соответствующие найденным значениям параметров корни: $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$.

$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$; $-\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$; $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$