Издательство «Легион»

Методы решения задач с параметром на ЕГЭ

докладчик: Кулабухов Сергей Юрьевич

Обобщённый план варианта КИМ ЕГЭ 2025 года по МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень)

(фрагмент)

Используются следующие условные обозначения. *Уровни сложности заданий: Б – базовый; П – повышенный; В – высокий.*

Номер задания	Проверяемые предметные результаты освоения основной образовательной программы	Коды проверяемых требований (по кодификатору)	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Примерное время выполнения задания выпускником, изучавшим математику на базовом уровне (в мин.)	Примерное время выполнения задания выпускником, изучавшим математику на профильном уровне (в мин.)
18	Умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приёмов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; умение выражать формулами зависимости между величинами; использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами	3, 5	2–4	В	4	–	35

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

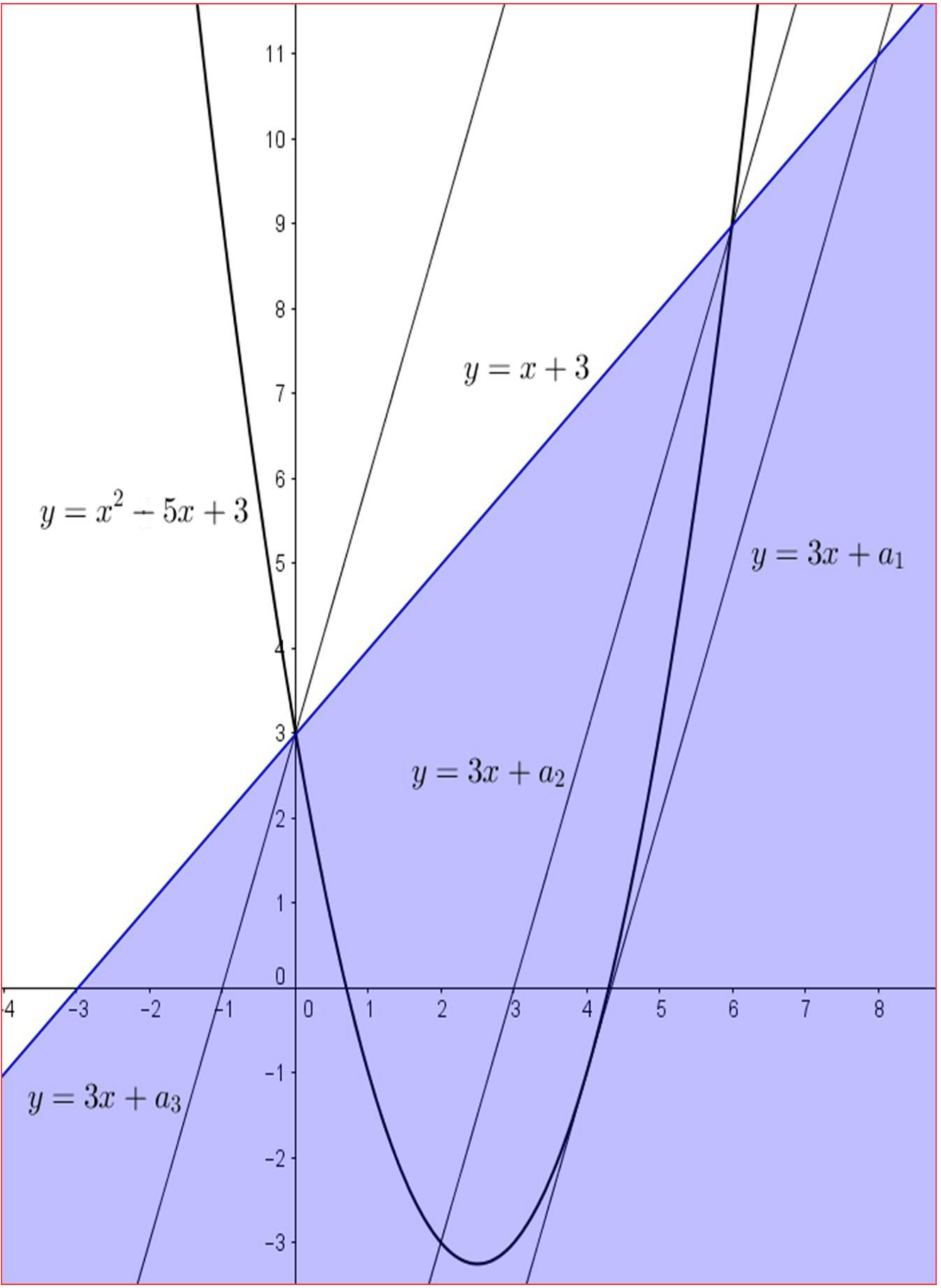
$$\begin{cases} \left(x^2-5x-y+3\right)\cdot\sqrt{x-y+3}=0, \\ y=3x+a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение

$$\begin{cases} (x^2-5x-y+3)\cdot\sqrt{x-y+3}=0 \\ y=3x+a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-5x-y+3=0 \\ x-y+3\geqslant 0 \end{cases} \\ x-y+3=0 \end{array}\right. \\ y=3x+a \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x^2-5x+3 \\ y\leqslant x+3 \end{cases} \\ y=x+3 \end{array}\right. \\ y=3x+a \end{cases}$$



Из рисунка видно, что исходная система имеет ровно два решения при $a \in \{a_1\} \cup [a_2; a_3)$.

1. Найдём a_1.
Уравнение $x^2 - 5x + 3 = 3x + a_1$ должно иметь единственное решение.
$x^2 - 8x + 3 - a_1 = 0,\ D = 64 - 4(3 - a_1) = 0,\ a_1 = -13.$

2. Найдём a_2.
$x + 3 = x^2 - 5x + 3,\ x^2 - 6x = 0,\ x(x-6) = 0,\ x = 6.$
$x + 3 = 3x + a_2,\ a_2 = -2x + 3 = -2\cdot 6 + 3 = -9.$

3. Найдём a_3.
Прямая $y = 3x + a_3$ проходит через точку $(0; 3)$.
Значит, $3 = 3\cdot 0 + a_3,\ a_3 = 3.$

Ответ: $\{-13\} \cup [-9; 3)$.

Решение.

Каждое решение уравнения $\left(x^2-5x-y+3\right)\cdot\sqrt{x-y+3}=0$ либо является решением уравнения $x-y+3=0$, откуда $y=x+3$, либо является решением системы:

$$\begin{cases} x^2-5x-y+3=0, \\ x-y+3\geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y=x^2-5x+3, \\ y\leq x+3; \end{cases} \quad \begin{cases} y=x^2-5x+3, \\ x^2-5x+3\leq x+3; \end{cases} \quad \begin{cases} y=x^2-5x+3, \\ x^2-6x\leq 0, \end{cases}$$

откуда $y=x^2-5x+3$ при условии $0\leq x\leq 6$.

Для каждого из этих случаев подставим $y=3x+a$ и найдём количество корней получившегося уравнения в зависимости от a.

Первый случай: $3x+a=x+3$, откуда $x=\dfrac{3-a}{2}$.

Второй случай: $3x+a=x^2-5x+3$ при условии $0\leq x\leq 6$. Получаем квадратное уравнение $x^2-8x-a+3=0$. Дискриминант этого уравнения равен $64+4(a-3)=4(a+13)$. Значит, уравнение $x^2-8x-a+3=0$ имеет два корня при $a>-13$, имеет единственный корень $x=4$ при $a=-13$ и не имеет корней при $a<-13$.

При $a > -13$ функция $f(x) = x^2 - 8x - a + 3$ принимает наименьшее значение при $x = 4$, и это значение отрицательно. Следовательно, больший корень уравнения $f(x) = 0$ удовлетворяет условию $0 \le x \le 6$ тогда и только тогда, когда $f(6) \ge 0$; $-a - 9 \ge 0$, откуда $a \le -9$.

Аналогично меньший корень уравнения $f(x) = 0$ удовлетворяет условию $0 \le x \le 6$ тогда и только тогда, когда $f(0) \ge 0$; $-a + 3 \ge 0$, откуда $a \le 3$.

Число $\dfrac{3-a}{2}$ является корнем квадратного уравнения $f(x) = 0$ при $\left(\dfrac{3-a}{2}\right)^2 - 4(3-a) - a + 3 = 0$, откуда

$$\left(\frac{a-3}{2}\right)^2 + 3(a-3) = 0;\ (a-3)(a+9) = 0,$$

то есть при $a = 3$ и при $a = -9$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно два различных решения при $a = -13$; $-9 \le a < 3$.

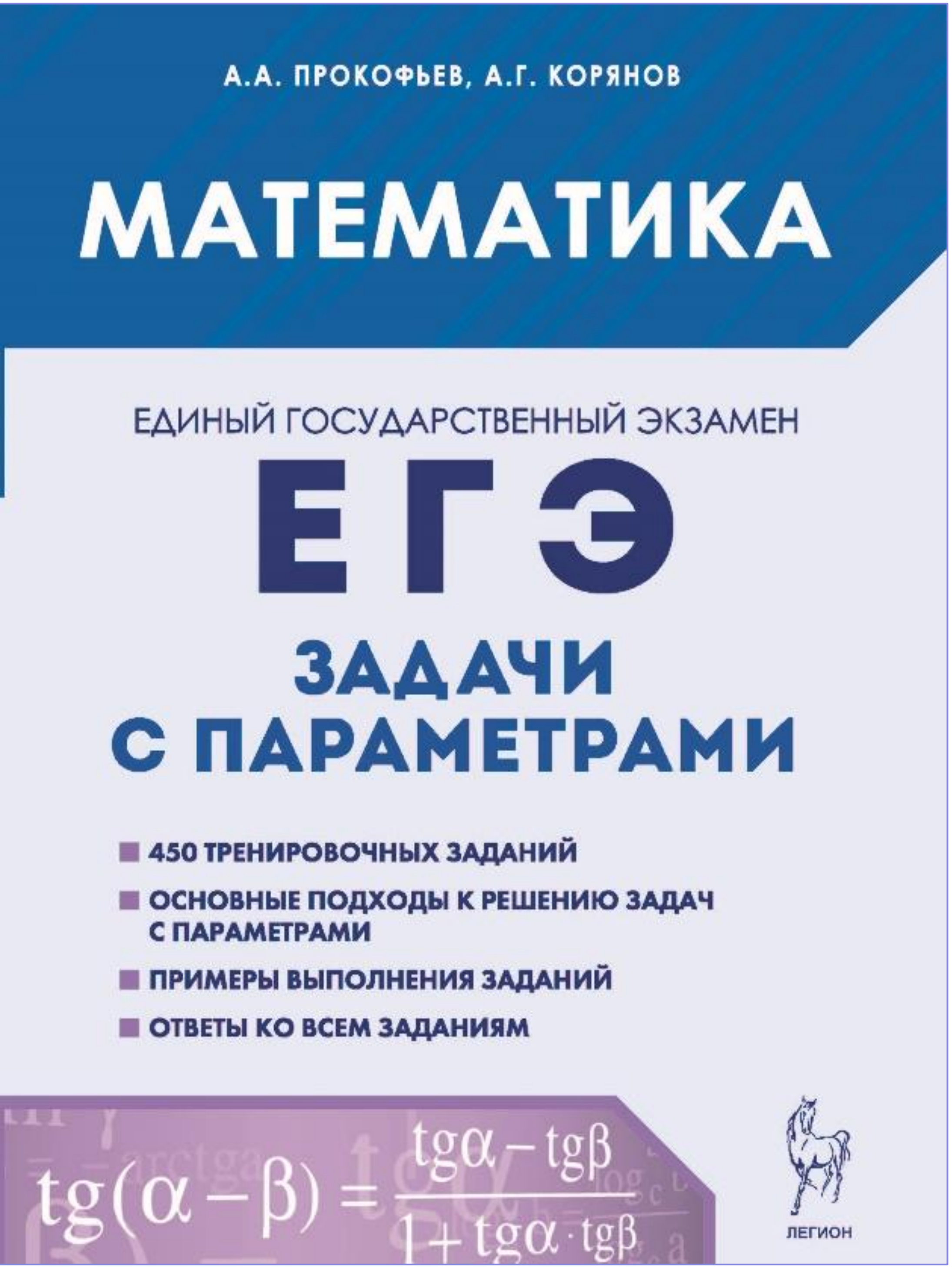
Ответ: $a = -13$; $-9 \le a < 3$.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН

Пособие позволяет подготовиться к заданиям **с развёрнутым ответом по алгебре**:

- Тригонометрические уравнения
- Неравенства
- Экономические задачи
- Задания с параметром
- Олимпиадные задачи

Часть IV. Методы решения задач с параметрами

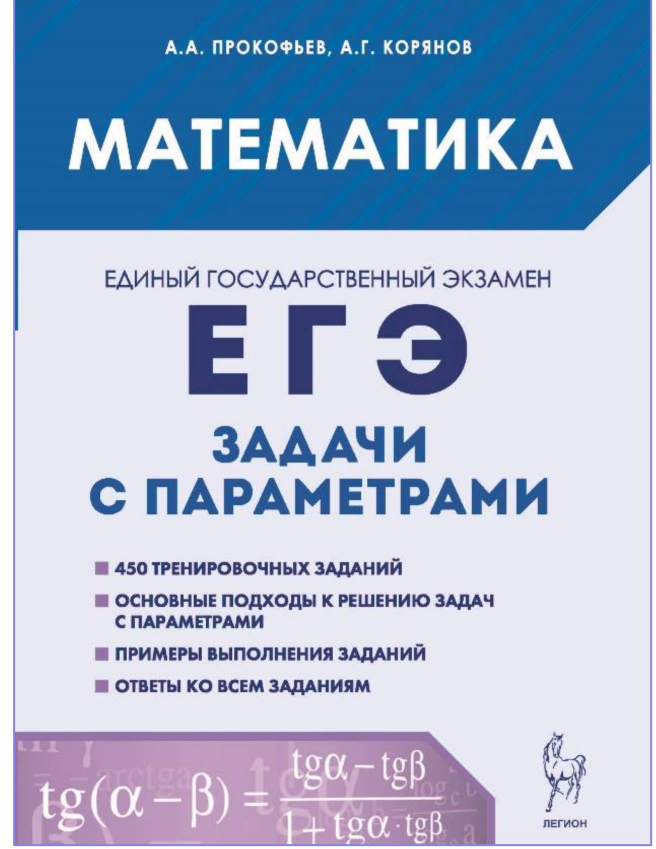


В книге рассмотрены основные подходы к решению задач с параметрами:

алгебраический, функциональный, функционально-графический и геометрический.

Задачи классифицированы по методам их решения.

Оглавление



А.А. ПРОКОФЬЕВ, А.Г. КОРЯНОВ
МАТЕМАТИКА
ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН
ЕГЭ
ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ
450 ТРЕНИРОВОЧНЫХ ЗАДАНИЙ
ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ
ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ
ОТВЕТЫ КО ВСЕМ ЗАДАНИЯМ
$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$
ЛЕГИОН

Стандартные алгоритмы + «ветвление»

Найдите все значения параметра a, при которых только один из корней уравнения $|x + a - 7| = 2a + 3$ принадлежит отрезку [-3;1].

Решение: Если $2a + 3 < 0$, уравнение не имеет корней.

При $2a + 3 \geqslant 0$, то есть $a \geqslant -1,5$, получим совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x + a - 7 = 2a + 3, \\ x + a - 7 = -2a - 3, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = a + 10, \\ x_2 = -3a + 4. \end{array}\right.$$

Условие задачи выполняется, если один из корней уравнения $|x + a - 7| = 2a + 3$ принадлежит отрезку [-3;1], а другой нет.

x_1 принадлежит отрезку [-3;1], если $-3 \leqslant a + 10 \leqslant 1$, $-13 \leqslant a \leqslant -9$.

Но при таких значениях параметра уравнение не имеет корней, значит $x_1 = a + 10$ ни при каких значениях не принадлежит отрезку [-3;1].

Найдём, при каких a корень $x_2 = -3a + 4$ лежит на этом отрезке.

$$-3 \leqslant -3a + 4 \leqslant 1, \quad -7 \leqslant -3a \leqslant -3, \quad 1 \leqslant a \leqslant \frac{7}{3}.$$

Ответ: $1 \leqslant a \leqslant \dfrac{7}{3}$.

Параметр как равноправная переменная

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}}=\sin x$ имеет хотя бы один корень.

Решение

1. Пусть $t=\sin x$, $-1\leqslant t\leqslant 1$.
Тогда уравнение примет вид: $\sqrt{a+\sqrt{a+t}}=t$.

Это уравнение имеет корни при $t\geqslant 0$.

Уравнение $\sqrt{a+t}=t^2-a$, имеет корни при $t^2\geqslant a$.

Получим систему:

$$\begin{cases} a+t=(t^2-a)^2 \\ 0\leqslant t\leqslant 1 \\ t^2\geqslant a \end{cases} \qquad (*)$$

$$\begin{cases} a+t=(t^2-a)^2 \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ t^2 \geqslant a \end{cases} \qquad (*)$$

2. Уравнение $a+t=(t^2-a)^2$ представим как квадратное относительно параметра a.

$$a+t=t^4-2at^2+a^2$$
$$a^2-(2t^2+1)a+t^4-t=0.$$

Решим его.
$D=(2t^2+1)^2-4(t^4-t)=4t^4+4t^2+1-4t^4+4t=4t^2+4t+1=(2t+1)^2.$

$$a_{1,2}=\frac{2t^2+1\pm(2t+1)}{2}$$

$$a_1=\frac{2t^2+1+2t+1}{2}=t^2+t+1$$

$$a_2=\frac{2t^2+1-2t-1}{2}=t^2-t.$$

3. Таким образом, система $(*)$ эквивалентна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} a=t^2+t+1 \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ t^2 \geqslant a \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a=t^2-t \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ t^2 \geqslant a \end{cases}$$

4. Рассмотрим первую систему

$$\begin{cases} a = t^2 + t + 1 \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ t^2 \geqslant a \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы следует, что $t^2 = a - t - 1$. Учитывая второе неравенство $0 \leqslant t \leqslant 1$ получим, что $t^2 < a$. Это противоречит третьему неравенству $t^2 \geqslant a$. Первая система несовместна.

5. Найдём все значения параметра a, удовлетворяющие второй системе

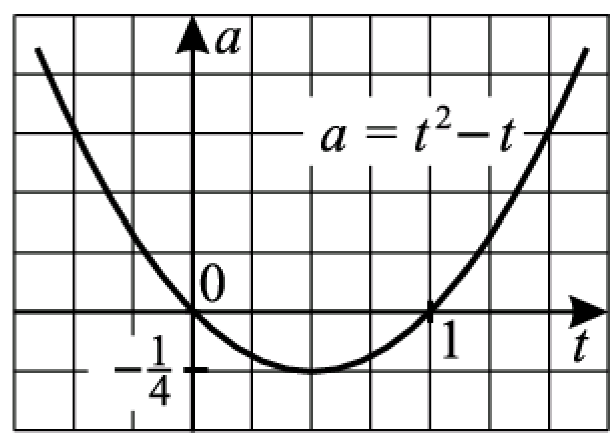
$$\begin{cases} a = t^2 - t \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ t^2 \geqslant a \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы следует, что $t^2 = a + t$. Учитывая второе неравенство $0 \leqslant t \leqslant 1$, получим в качестве следствия третье неравенство $t^2 \geqslant a$.

Поэтому вторая система равносильна системе

$$\begin{cases} a = t^2 - t \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Из рисунка видно, что значения параметра, удовлетворяющие последней системе $a \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right]$.



Ответ: $a \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right]$.

Расположение корней квадратного трёхчлена

18 Найдите значения параметра a, при которых среди корней уравнения $\sqrt{1-(x^2-2x-a^2+2a)^8}+\sqrt{1+(x^2-2x-a^2+2a)^8}=2$ имеется ровно один положительный.

Решение

1. Замена $t=(x^2-2x-a^2+2a)^8$, $t\geqslant 0$ приводит к уравнению $\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t}=2$.

$1-t+2\sqrt{(1-t)(1+t)}+1+t=4$

$\sqrt{1-t^2}=1$

$1-t^2=1$

$t^2=0$

$t=0.$

Проверка показывает, что $t=0$ корень уравнения.

2. Исходное уравнение имеет корни при

$(x^2-2x-a^2+2a)^8=0$

$x^2-2x-a^2+2a=0.$

$D=4-4(-a^2+2a)=4a^2-8a+4=4(a-1)^2.$

3. Если $D = 0, 4(a-1)^2 = 0, a = 1.$

При $a = 1$ уравнение $x^2 - 2x - a^2 + 2a = 0$ принимает вид

$x^2 - 2x - 1^2 + 2 \cdot 1 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0$

$x = 1.$

Исходное уравнение имеет единственный корень $x = 1$ и он положительный.

4. Если $D > 0, 4(a-1)^2 > 0, a \neq 1.$

Уравнение $x^2 - 2x - a^2 + 2a = 0$ имеет два корня x_1 и x_2,

причём $x_1 \cdot x_2 = -a^2 + 2a$ по теореме Виета.

Эти корни разного знака, если $x_1 \cdot x_2 < 0.$

$-a^2 + 2a < 0$ при $a < 0$ или $a > 2$, то есть $a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty).$

Рассмотрим случаи, когда один из корней равен нулю,

то есть $x_1 \cdot x_2 = -a^2 + 2a = 0$, $a = 0$ или $a = 2.$

Если $a = 0$, то уравнение $x^2 - 2x - a^2 + 2a = 0$ примет вид

$x^2 - 2x - 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$

$x(x-2) = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 2.$ Исходное уравнение имеет один

положительный корень, то есть $a = 0$ подходит.

Если $a = 2$, то уравнение $x^2 - 2x - a^2 + 2a = 0$ примет вид

$x^2 - 2x - 2^2 + 2 \cdot 2 = 0$
$x(x - 2) = 0$
$x_1 = 0, x_2 = 2$. Исходное уравнение имеет один положительный корень, $a = 2$ тоже подходит.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup \{1\} \cup [2; +\infty)$.

Свойства функций. Производная

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{1-3x} = a - |6x|$ имеет более двух корней.

Решение:

$a = \sqrt{1-3x} + |6x|.$

$g(x) = \sqrt{1-3x} + |6x|.$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-3x} + 6x \text{ при } x \in \left[0;\ \dfrac{1}{3}\right], \\ \sqrt{1-3x} - 6x \text{ при } x \in (-\infty;\ 0). \end{cases}$$

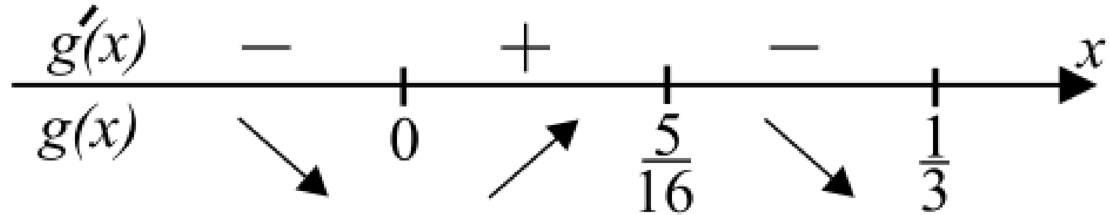
При $x < 0$ $\ g'(x) = \dfrac{-3}{2\sqrt{1-3x}} - 6 < 0.$

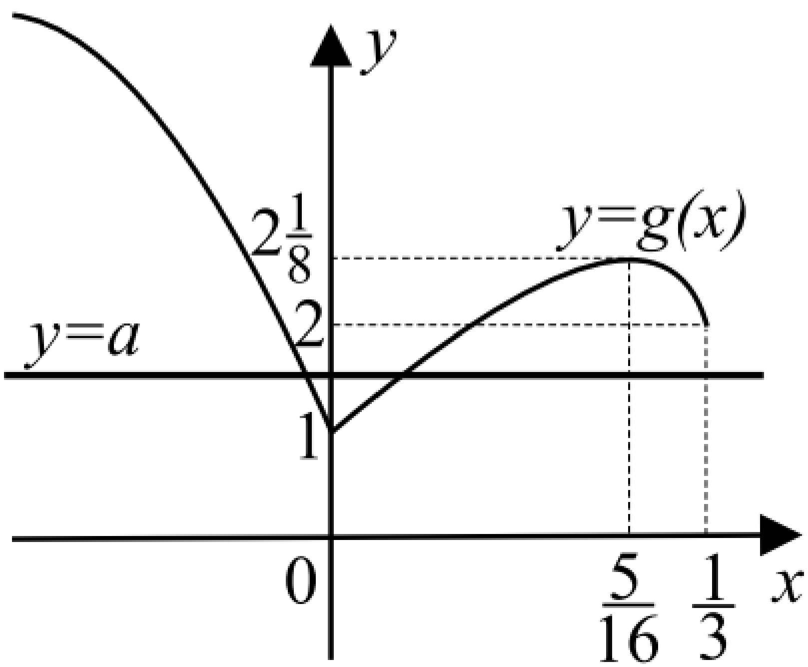
При $x \in \left[0; \dfrac{1}{3}\right]$ $\ g'(x) = \dfrac{-3}{2\sqrt{1-3x}} + 6.$

$g'(x)=0$, если $\dfrac{-3}{2\sqrt{1-3x}}+6=0$; $\sqrt{1-3x}=\dfrac{1}{4}$; $x=\dfrac{5}{16}$.

$g\left(\dfrac{5}{16}\right)=\dfrac{1}{4}+6\cdot\dfrac{5}{16}=2\dfrac{1}{8}$, $g(0)=1$;

$g\left(\dfrac{1}{3}\right)=2$.





Ответ: $\left[2;\ 2\dfrac{1}{8}\right)$.

Координатно-параметрический метод

Пусть на плоскости даны две взаимно перпендикулярные числовые оси с общим началом в точке O. Ось Ox называется *координатной*, а ось Oa – *параметрической.*

Вся плоскость называется *координатно-параметрической (КП-плоскость).*

Метод решения задач с параметрами, использующий КП-плоскость называется *координатно-параметрическим (КП-методом)* или *методом областей.*

КП-метод основан на нахождении множества всех точек КП-плоскости, значения координаты x и параметра a каждой из которых удовлетворяют условию задачи.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система

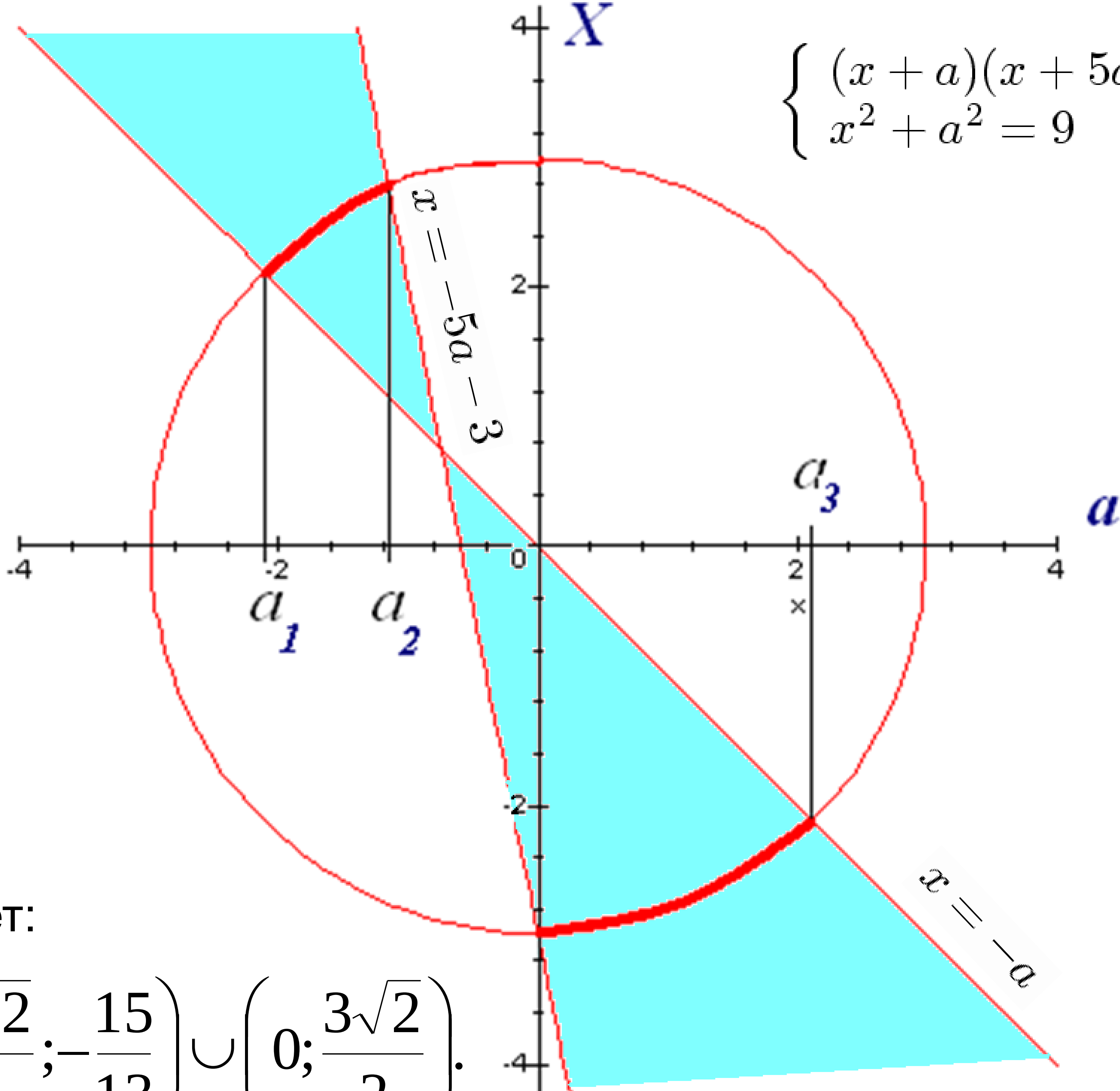
$$\begin{cases} x^2+(6a+3)x+5a^2+3a<0, \\ x^2+a^2=9 \end{cases}$$

имеет решения.

Решение

$$\begin{cases} (x+a)(x+5a+3)<0 \\ x^2+a^2=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+a)(x+5a+3) < 0 \\ x^2 + a^2 = 9 \end{cases}$$



Ответ:

$$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2};-\frac{15}{13}\right)\cup\left(0;\frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Примеры заданий ЕГЭ

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-2a}\cos x = \sqrt{x-2a}\sin x$ имеет единственный корень на промежутке $[0;\pi]$.

Решение

Первый способ.

Преобразуем уравнение

$\sqrt{x-2a}(\cos x - \sin x) = 0$. На промежутке $[0;\pi]$ оно равносильно системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-2a=0, \\ \cos x - \sin x = 0, \end{array}\right. \\ x-2a \geqslant 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2a, \\ \operatorname{tg} x = 1, \end{array}\right. \\ x-2a \geqslant 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2a, (1) \\ x=\dfrac{\pi}{4}, (2) \end{array}\right. \\ x-2a \geqslant 0, (3) \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi. (4) \end{cases}$$

Рассмотрим графический способ решения, построим графики входящих в систему уравнений и неравенств на плоскости Oxa.

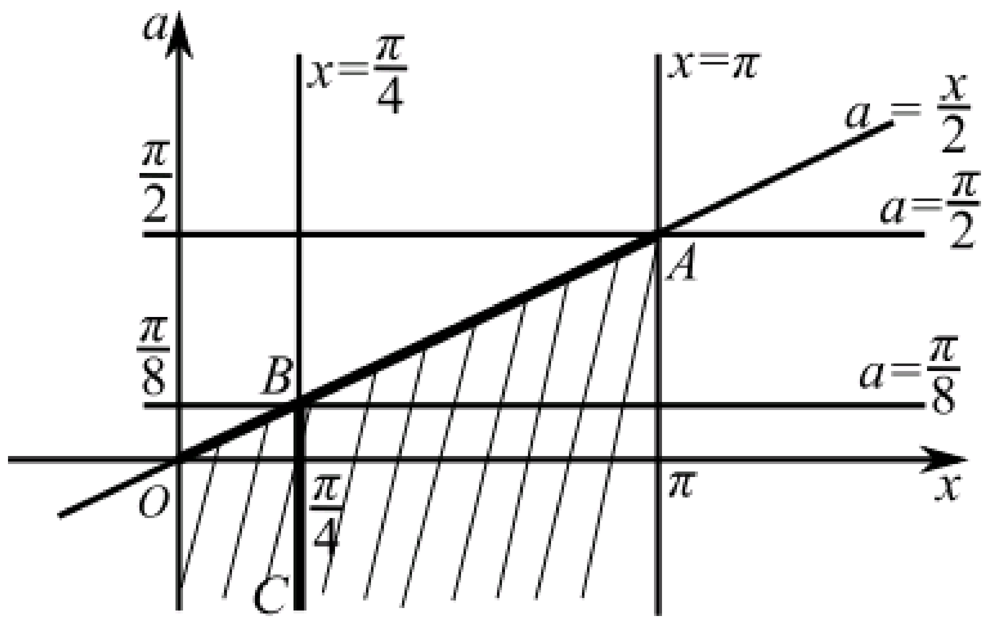
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2a, (1) \\ x = \dfrac{\pi}{4}, (2) \end{array} \right. \\ x - 2a \geqslant 0, (3) \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi. (4) \end{cases}$$

(1) $a = \dfrac{x}{2}$ — прямая, $a(0) = 0$, $a(\pi) = \dfrac{\pi}{2}$.

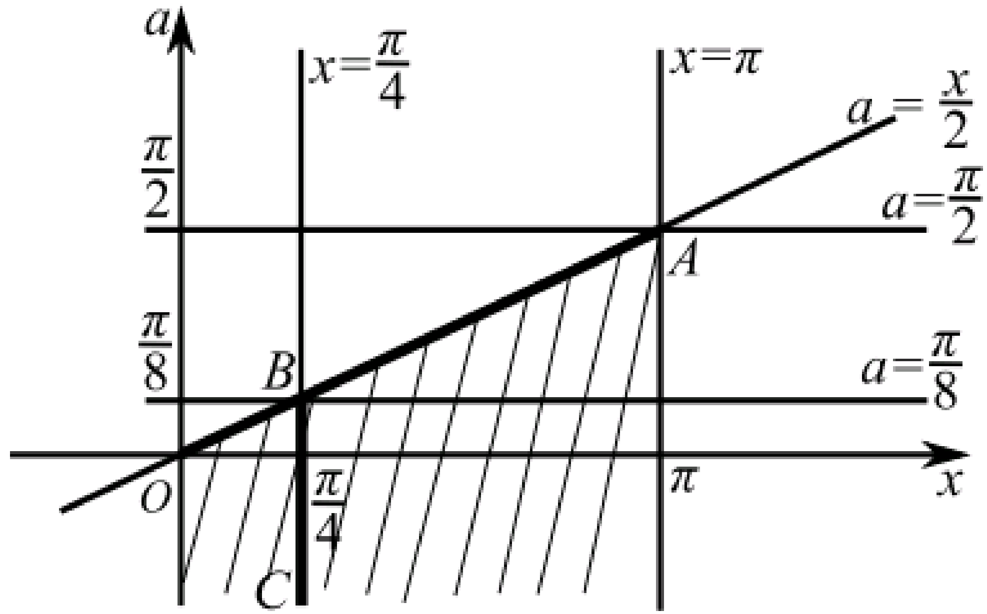
(2) $x = \dfrac{\pi}{4}$ — вертикальная прямая.

(3) $a \leqslant \dfrac{x}{2}$ — полуплоскость с границей $a = \dfrac{x}{2}$.

(4) $0 \leqslant x \leqslant \pi$ — вертикальная полоса с границами $x = 0$ и $x = \pi$.



Система неравенств $\begin{cases} x - 2a \geqslant 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$ задаёт множество точек — отрезок OA и часть полосы под ним (на рисунке заштриховано).



Решения всей системы задаются частями прямых $a = \frac{x}{2}$ и $x = \frac{\pi}{4}$, попадающими в это множество точек, на рисунке это отрезок OA и луч BC.

B — точка пересечения прямых $a = \frac{x}{2}$ и $x = \frac{\pi}{4}$, её координаты $x = \frac{\pi}{4}$, $a = \frac{\pi}{4} : 2 = \frac{\pi}{8}$.

Будем проводить горизонтальные прямые $a = a_k$. Количество корней заданного уравнения при $a = a_k$ равно количеству точек пересечения таких прямых с отрезком OA и лучом BC.

Видим, что единственная точка пересечения с горизонтальной прямой будет, если $a < 0$, $\frac{\pi}{8} \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}$, то есть $a \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup \left[\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение

Второй способ.

Решим уравнение $\sqrt{x-2a}(\cos x - \sin x) = 0$ при $x \in [0; \pi]$. ОДЗ $x \geqslant 2a$.

1. $\sqrt{x-2a} = 0$, $x = 2a$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ только в том случае, если $0 \leqslant 2a \leqslant \pi$; $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

То есть при $a \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ уравнение имеет корень $x = 2a$.

2. $\cos x - \sin x = 0$; $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. С учётом того, что $x \in [0; \pi]$, получим единственное значение $x = \dfrac{\pi}{4}$. Оно попадает в ОДЗ при $\dfrac{\pi}{4} \geqslant 2a$, то есть $a \leqslant \dfrac{\pi}{8}$. Значит, при $a \leqslant \dfrac{\pi}{8}$ уравнение имеет корень $x = \dfrac{\pi}{4}$. Таким образом, при $a \in (-\infty; 0)$ уравнение имеет на отрезке $[0; \pi]$ единственный корень $x = \dfrac{\pi}{4}$, при $a \in \left[0; \dfrac{\pi}{8}\right]$ уравнение имеет корни $x = \dfrac{\pi}{4}$ и $x = 2a$, которые могут совпадать или не совпадать, при $a \in \left(\dfrac{\pi}{8}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ уравнение имеет единственный на отрезке корень $x = 2a$, при $a > \dfrac{\pi}{2}$ — корней на отрезке $[0; \pi]$ нет.

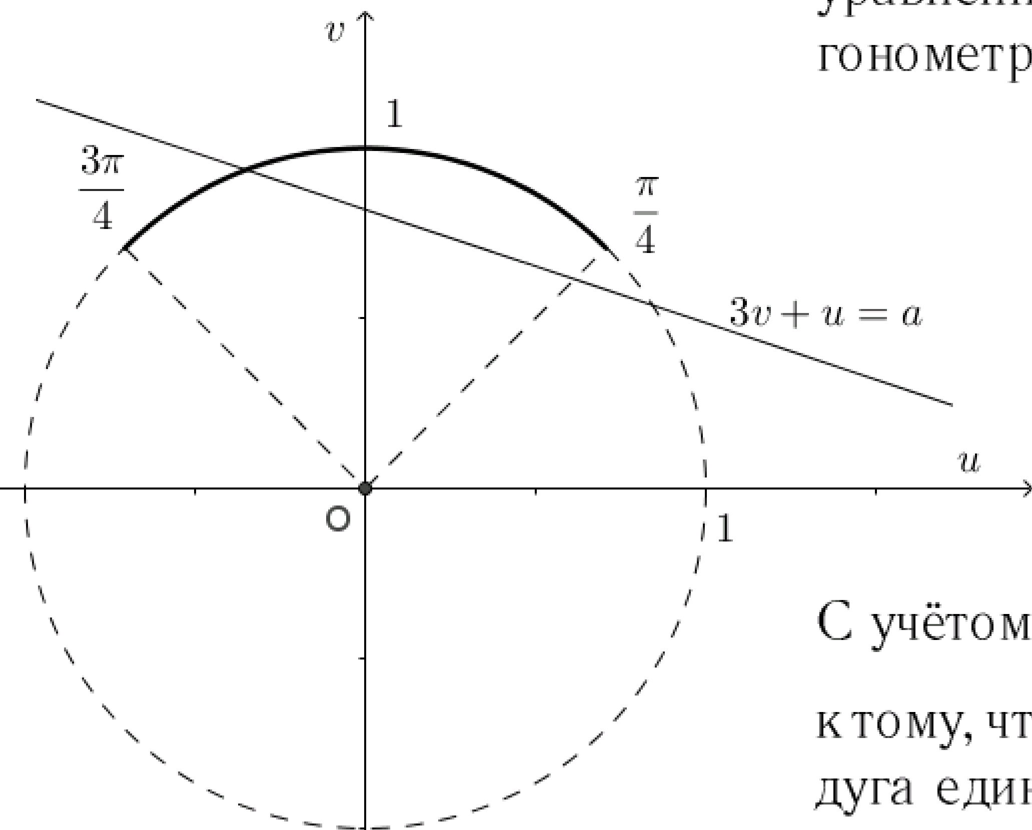
Найдём при каких значениях параметра a числа $2a$ и $\dfrac{\pi}{4}$ совпадают: $2a = \dfrac{\pi}{4}$; $a = \dfrac{\pi}{8}$. Значит, при $a = \dfrac{\pi}{8}$ уравнение тоже имеет единственный корень на отрезке $[0; \pi]$.

Таким образом, единственный корень на отрезке $[0; \pi]$ будет при $a \in (-\infty; 0) \cup \left[\dfrac{\pi}{8}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup \left[\dfrac{\pi}{8}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3\sin x + \cos x = a$ имеет ровно один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение 1

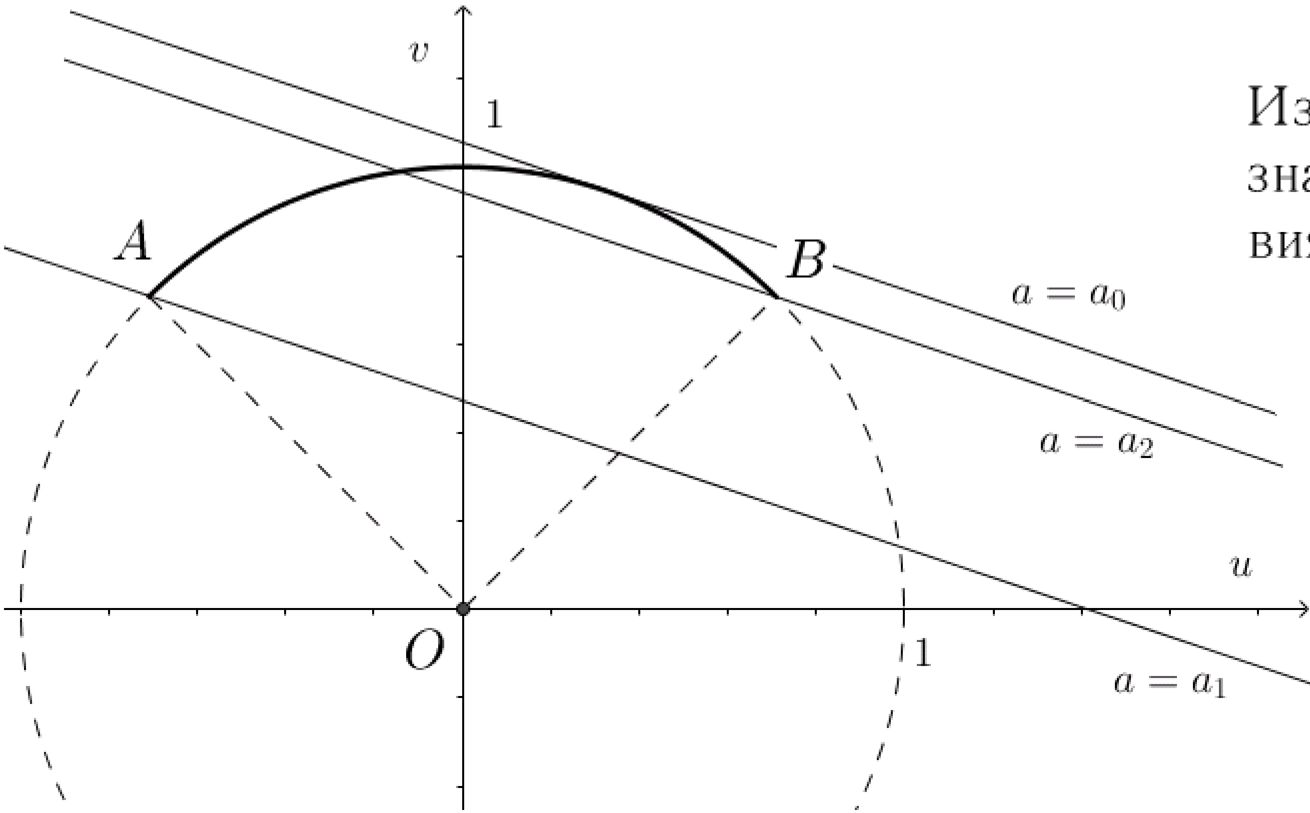


1. Замена $u = \cos x$, $v = \sin x$ приводит исходное уравнение к виду $3v+u = a$. Учитывая основное тригонометрическое тождество, получим систему

$$\begin{cases} 3v + u = a, \\ u^2 + v^2 = 1. \end{cases}$$

С учётом ограничения $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, задача сводится к тому, что необходимо найти значения a при которых дуга единичной окружности $u^2 + v^2 = 1$ и прямая $3v + u = a$ имеют единственную общую точку (см. рис.).

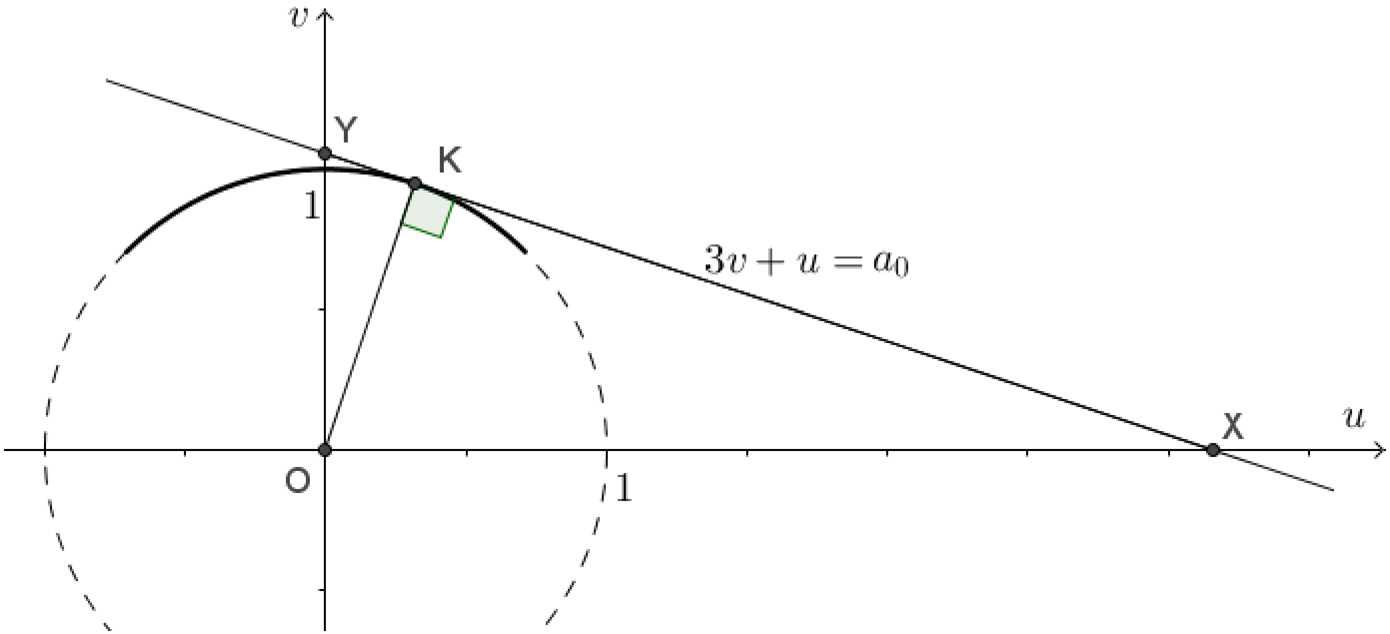
Прямые вида $3v + u = a$ при различных значениях a.



Из рисунка видно, что искомые значения a удовлетворяют условиям $a_1 \leqslant a < a_2$ или $a = a_0$.

2. Найдём a_1. Подставим координаты точки $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ в уравнение прямой $3v + u = a$: $3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = a_1$, $a_1 = \sqrt{2}$.

Найдём a_2. Подставим координаты точки $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ в уравнение прямой $3v + u = a$: $3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = a_2$, $a_2 = 2\sqrt{2}$.



3. Найдём a_0. В треугольнике XOY: $OX = a_0, OY = \dfrac{a_0}{3}$.

По теореме Пифагора $XY = \sqrt{OX^2 + OY^2} = \dfrac{a_0}{3}\sqrt{10}$.

Высота, проведённая из вершины прямого угла, $OK = \dfrac{OX \cdot OY}{XY}$.

Тогда $1 = \dfrac{a_0 \cdot \dfrac{a_0}{3}}{\dfrac{a_0}{3}\sqrt{10}}$. Отсюда $a_0 = \sqrt{10}$.

Ответ: $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup \{\sqrt{10}\}$.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3\sin x + \cos x = a$ имеет ровно один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение 2

1. Замена $u = \cos x$, $v = \sin x$ приводит исходное уравнение к виду $3v + u = a$. Учитывая основное тригонометрическое тождество и ограничение $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, получим систему

$$\begin{cases} 3v + u = a, \\ u^2 + v^2 = 1, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant v \leqslant 1, \end{cases}$$

которая должна иметь единственное решение.

Выразив из первого уравнения системы $u = a - 3v$ и подставив во второе уравнение, получим квадратное уравнение:

$$(a - 3v)^2 + v^2 = 1,$$

$$10v^2 - 6av + a^2 - 1 = 0. \qquad (*)$$

Это уравнение должно иметь единственное решение на отрезке $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.

$$10v^2 - 6av + a^2 - 1 = 0. \qquad (*)$$

2. Если $D = 0$ и единственный корень уравнения $(*)$ принадлежит отрезку $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.

$D = (-6a)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (a^2 - 1) = 36a^2 - 40a^2 + 40 = -4a^2 + 40 = 0$,
$a^2 = 10$, $a = \pm\sqrt{10}$.

Тогда единственный корень уравнения $(*)$ равен $v = \dfrac{6a}{2 \cdot 10} = \dfrac{3}{10}a$.

При $a = \sqrt{10}$, $v = \dfrac{3}{10} \cdot \sqrt{10} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.

При $a = -\sqrt{10}$, $v = \dfrac{3}{10} \cdot (-\sqrt{10}) = -\dfrac{3}{\sqrt{10}} \notin \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.

Значит, $a = \sqrt{10}$ подходит.

$$10v^2 - 6av + a^2 - 1 = 0. \qquad (*)$$

3. Если $D > 0$ и один из корней уравнения $(*)$ принадлежит отрезку $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$, а второй нет.

$D = -4a^2 + 40 > 0, 4a^2 < 40, a^2 < 10, -\sqrt{10} < a < \sqrt{10}.$

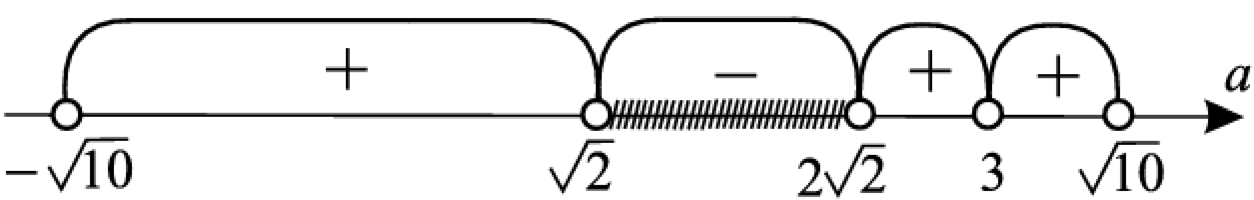
а) Рассмотрим функцию $f(v) = 10v^2 - 6av + a^2 - 1$. Условия того, что один из корней уравнения $(*)$ принадлежит *интервалу* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$, а второй нет, выражается системой

$$\begin{cases} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot f(1) < 0, \\ -\sqrt{10} < a < \sqrt{10}. \end{cases} \qquad (**)$$

$\left(10 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 6a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + a^2 - 1\right)(10 - 6a + a^2 - 1) < 0,$

$(a^2 - 3a\sqrt{2} + 4)(a^2 - 6a + 9) < 0,$

$(a - 2\sqrt{2})(a - \sqrt{2})(a - 3)^2 < 0.$



Из рисунка видно, что $\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$ — решение системы $(**)$.

$$10v^2 - 6av + a^2 - 1 = 0. \qquad (*)$$

б) При $a = \sqrt{2}$ уравнение $(*)$ примет вид $10v^2 - 6\sqrt{2}\cdot v + 1 = 0$.

$$v_{1,2} = \frac{6\sqrt{2} \pm \sqrt{36\cdot 2 - 4\cdot 10}}{2\cdot 10} = \frac{6\sqrt{2} \pm 4\sqrt{2}}{20}.$$

$$v_1 = \frac{10\sqrt{2}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2} \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right], \quad v_2 = \frac{2\sqrt{2}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{10} \notin \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right].$$

Значит, $a = \sqrt{2}$ подходит.

в) При $a = 2\sqrt{2}$ уравнение $(*)$ примет вид $10v^2 - 12\sqrt{2}\cdot v + 7 = 0$.

$$v_{1,2} = \frac{12\sqrt{2} \pm \sqrt{12^2\cdot 2 - 4\cdot 10\cdot 7}}{2\cdot 10} = \frac{12\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}}{20}.$$

$$v_1 = \frac{14\sqrt{2}}{20} = \frac{7\sqrt{2}}{10} \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right], \quad v_2 = \frac{10\sqrt{2}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2} \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right].$$

Значит, $a = 2\sqrt{2}$ не подходит.

Ответ: $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup \{\sqrt{10}\}$.

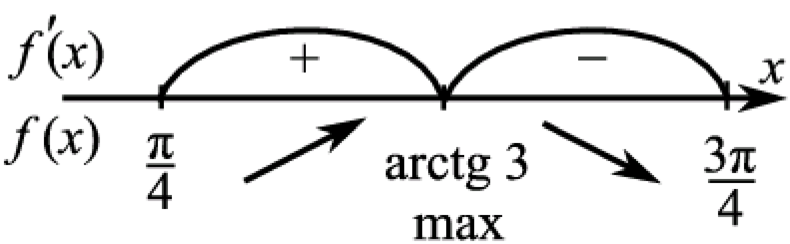
18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3\sin x + \cos x = a$ имеет ровно один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение 3

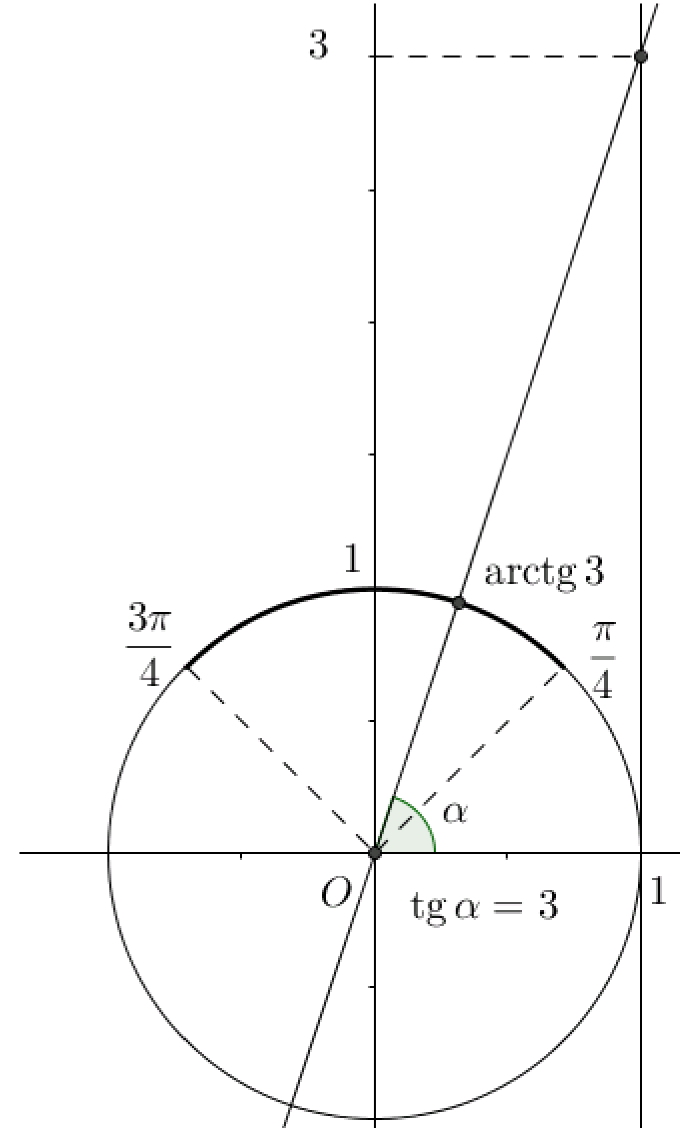
1. Рассмотрим функцию $f(x) = 3\sin x + \cos x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

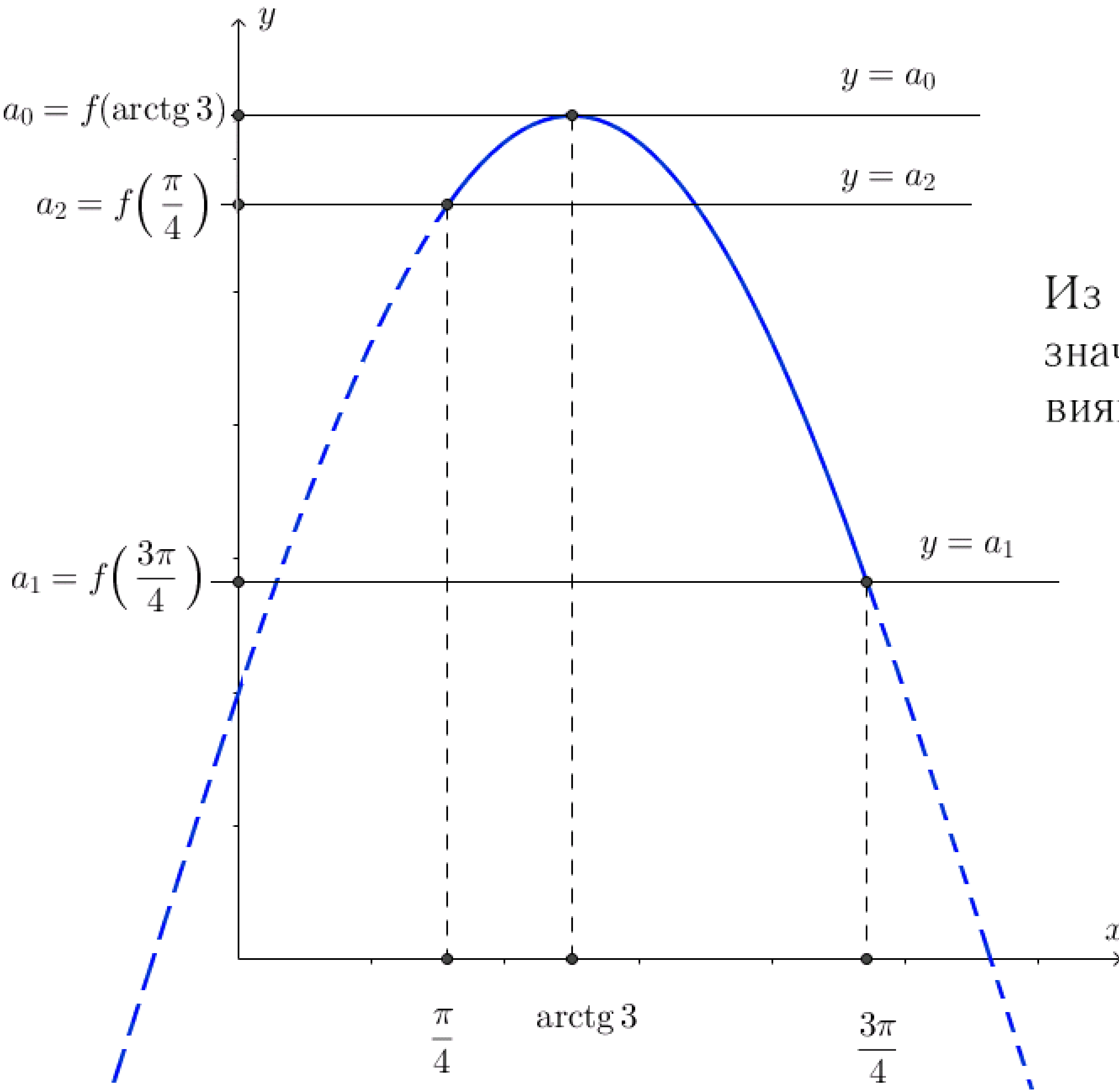
$f'(x) = 3\cos x - \sin x,$
$3\cos x - \sin x = 0 \quad (\cos x \neq 0),$
$\operatorname{tg} x = 3,$

$x = \operatorname{arctg} 3 \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right].$



$x = \operatorname{arctg} 3$ — точка максимума.





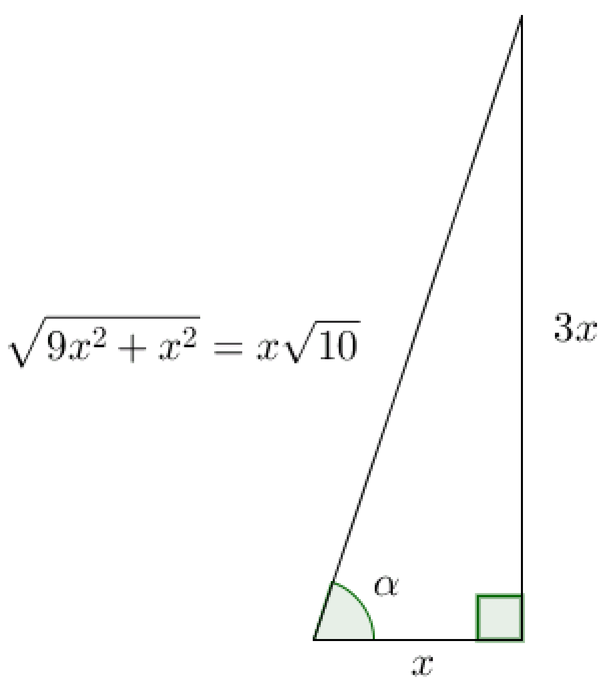
Из рисунка видно, что искомые значения a удовлетворяют условиям $a_1 \leqslant a < a_2$ или $a = a_0$.

$$f(x) = 3\sin x + \cos x$$

$$a_1 = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3\sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

$$a_2 = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$a_0 = f(\operatorname{arctg} 3) = 3\sin(\operatorname{arctg} 3) + \cos(\operatorname{arctg} 3) = 3\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$



$$\alpha = \operatorname{arctg} 3$$

$$\sin\alpha = \frac{3x}{x\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{x\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup \{\sqrt{10}\}.$

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3\sin x + \cos x = a$ имеет ровно один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение 4

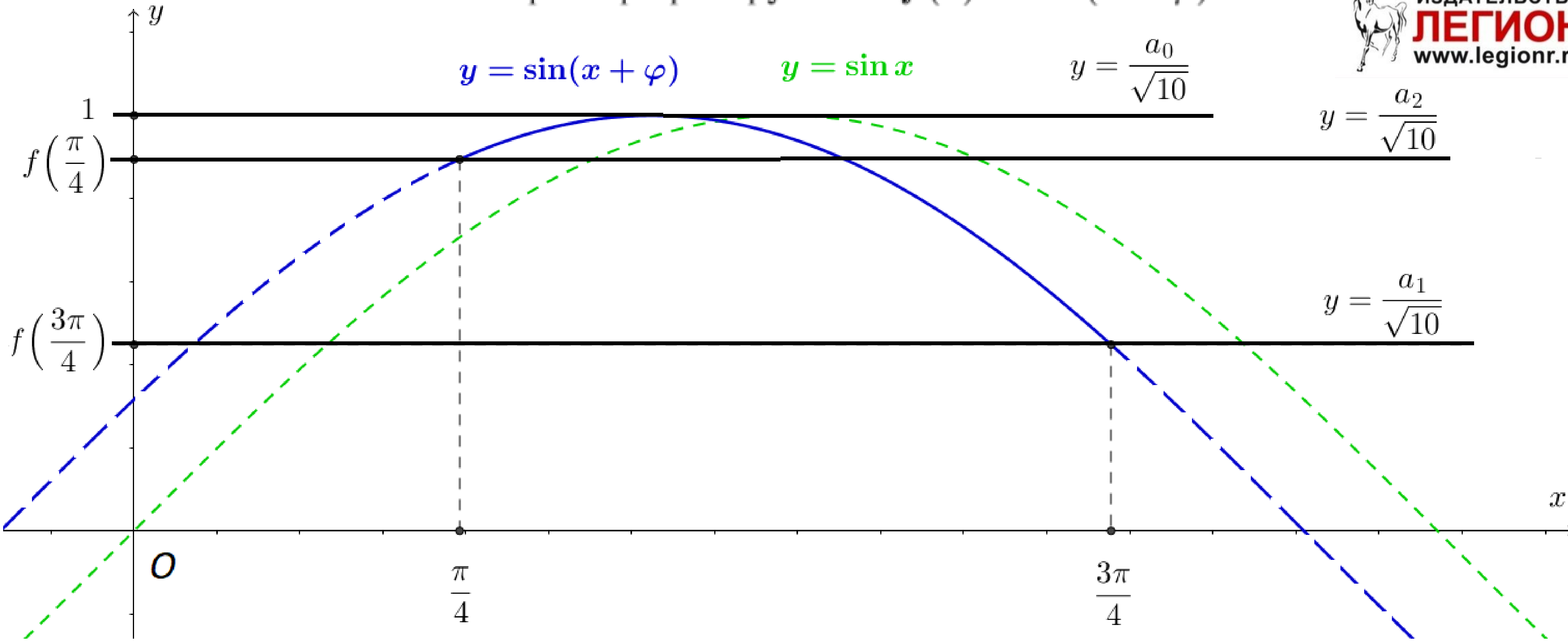
Домножив левую и правую часть исходного уравнения на множитель $\frac{1}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, получим

$$\frac{3}{\sqrt{10}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{10}}\cos x = \frac{a}{\sqrt{10}}.$$

Тогда для некоторого угла φ такого, что $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$ получим уравнение

$$\sin(x+\varphi) = \frac{a}{\sqrt{10}}.$$

Рассмотрим график функции $f(x) = \sin(x + \varphi)$.



Из рисунка видно, что искомые значения a удовлетворяют условиям $a_1 \leqslant a < a_2$ или $a = a_0$.

Так как $1 = \frac{a_0}{\sqrt{10}}$, то $a_0 = \sqrt{10}$.

$$\frac{a_1}{\sqrt{10}} = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \varphi\right) = \sin\frac{3\pi}{4}\cdot\cos\varphi + \cos\frac{3\pi}{4}\cdot\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}.$$

Отсюда $a_1 = \sqrt{2}$.

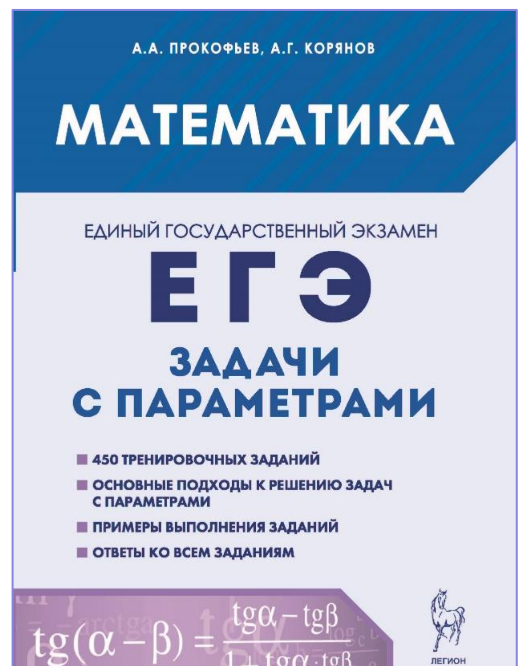
$$\frac{a_2}{\sqrt{10}} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\varphi + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}}.$$

Отсюда $a_2 = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup \{\sqrt{10}\}$.

Литература

1. *Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С.* Задачи с параметрами. – К.: РИА «Текст»; МП «ОКО». 1992. – 290 с.
2. *Моденов В. П.* Задачи с параметрами. Координатно-параметрический метод: учебное пособие. – М.: Издательство «Экзамен», 2007. – 285 с.
3. Пособия издательства «Легион».



Книги можно заказать в нашем интернет-магазине на сайте:

www.legionr.ru

Спрашивайте
в книжных магазинах города!

Издательство регулярно проводит онлайн-семинары авторов пособий с педагогами. По завершении каждого вебинара участники получают электронные сертификаты. Ссылки для участия вы сможете найти на сайте издательства www.legionr.ru

Все вебинары издательства «Легион» носят обучающий характер

legionrus@legionrus.com

Вступайте в группу

«Издательство «Легион»

контакте, на одноклассниках.

Видео вебинаров смотрите на RUTUBE.

Адрес для корреспонденции:
344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550

Спасибо за внимание!