« Эффективные методы и приёмы решения геометрических задач на разных этапах и уровнях обучения»

Рожкова Елена Ивановна, учитель математики МБОУ «Туровская СОШ»

г.о. Серпухов
2023г.

Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их.

Д. Пойа.

Методы решения геометрических задач:

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ – КОГДА ТРЕБУЕМОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ ВЫВОДИТСЯ С ПОМОЩЬЮ ЛОГИЧЕСКИХ РАССУЖДЕНИЙ ИЗ РЯДА ИЗВЕСТНЫХ ТЕОРЕМ;

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ – КОГДА ИСКОМАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА ВЫЧИСЛЯЕТСЯ НА ОСНОВАНИИ РАЗЛИЧНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР НЕПОСРЕДСТВЕННО ИЛИ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ;

комбинированный – когда на одних этапах решение ведется геометрическим методом, а на других – алгебраическим.

Геометрические методы:

метод длин;
метод треугольников;
метод параллельных прямых;
метод соотношений между сторонами и углами треугольника;
метод четырехугольников;
метод подобия треугольников;
тригонометрический метод (метод, основанный на соотношениях между сторонами и углами треугольника, выраженными через тригонометрические функции);
метод геометрических преобразований.

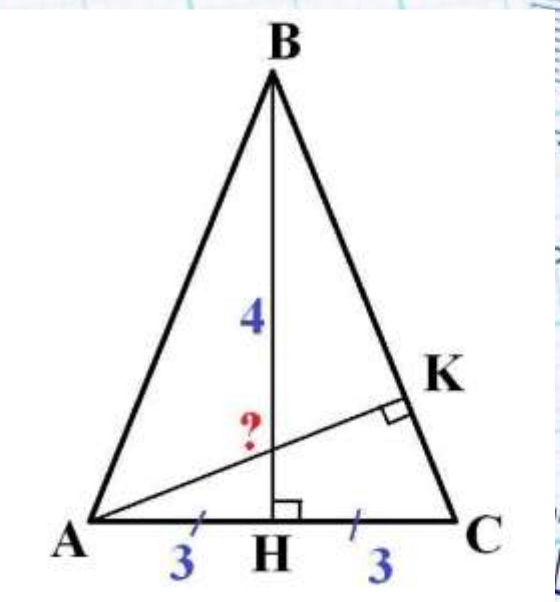
Комбинированный:

метод площадей;

Метод площадей

Метод площадей состоит в применении различных свойств площадей, соответственно для составления соотношений, связывающих данные задачи и неизвестные.

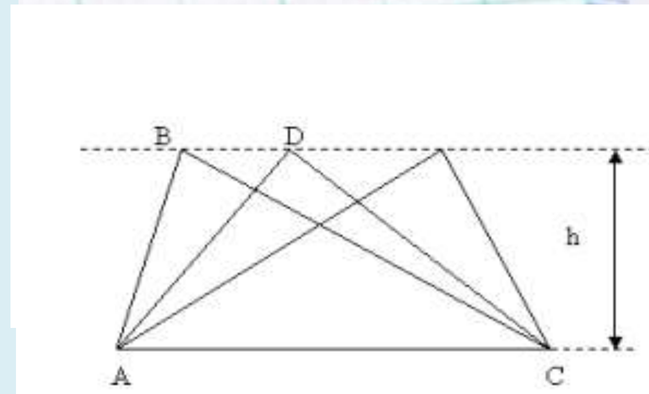
Например, такая задача: в равнобедренном треугольнике, известны основание и высота, проведенная к основанию, требуется найти высоту, проведенную к боковой стороне.



Основные свойства площадей

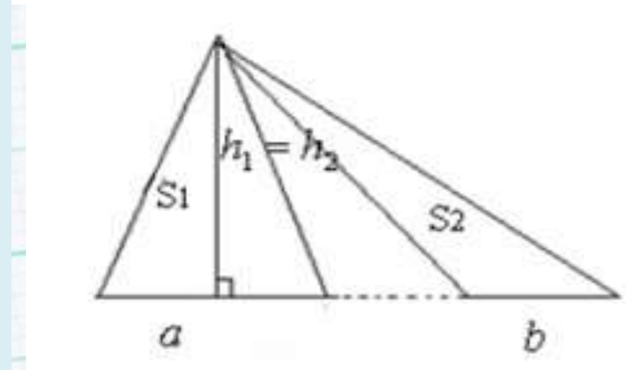
Свойство №1

Если вершину треугольника передвигать по прямой, параллельной основанию, то площадь при этом не измениться.



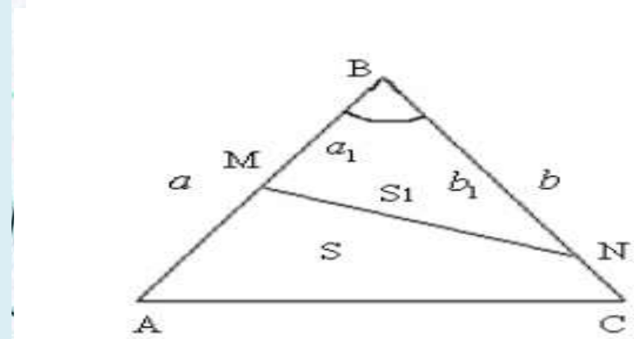
Свойство №2

Если два треугольника имеют одинаковые высоты, то отношение их площадей равно отношению длин оснований (сторон, на которые опущены эти высоты).



Свойство №3

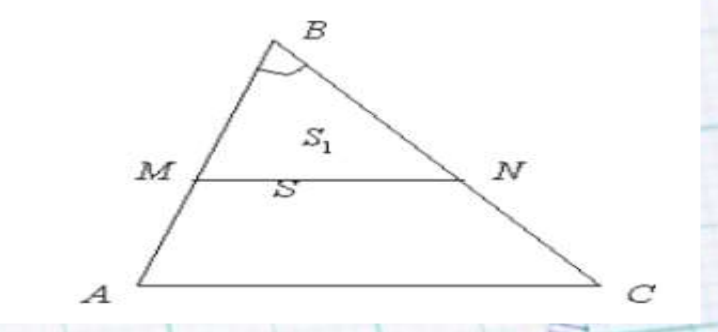
Если два треугольника имеют общий угол, то их площади относятся как произведение сторон, заключающих этот угол.



Основные свойства площадей

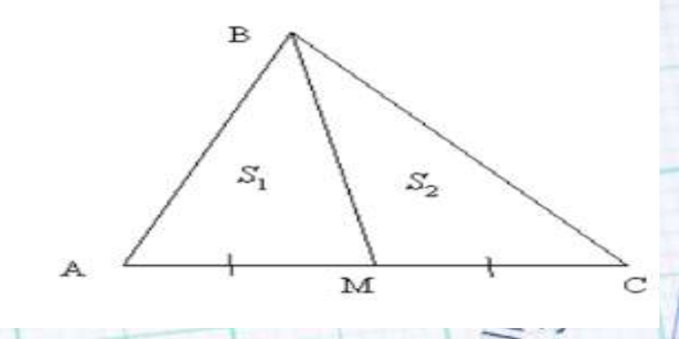
Свойство №4

Отношение площадей подобных треугольников равны квадрату коэффициента подобия.



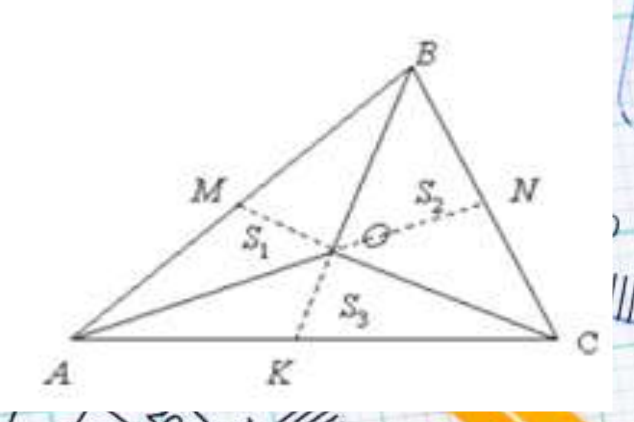
Свойство №5

Медиана треугольника делит его на две равновеликие части.



Свойство №6

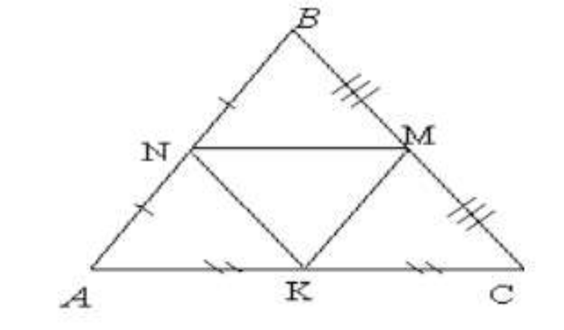
Медианы треугольника делят его на три равновеликие части



Основные свойства площадей

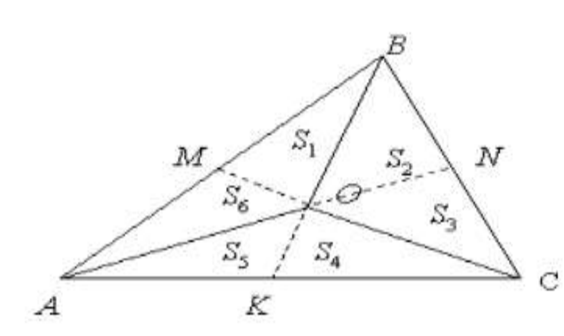
Свойство №7

Средние линии треугольника площади S отсекают от него треугольники площади ¼ S



Свойство №8

Медианы треугольника делят его на 6 равновеликих частей.



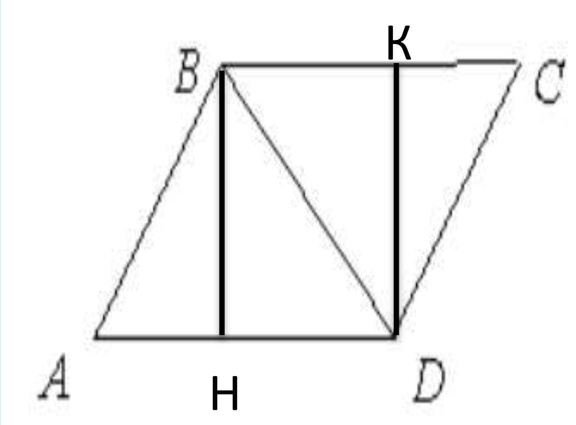
Утверждение.

Два треугольника являются равновеликими, если равны их высоты и основания.

Рассмотрим несколько задач из курса 8 класса:

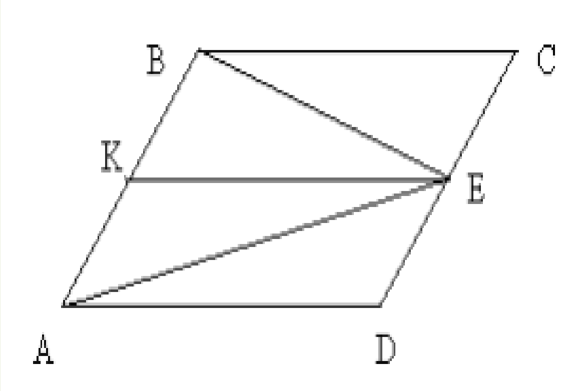
Задача 1. Докажите, что диагональ параллелограмма делит его на два равновеликих треугольника.

Решение. Высоты треугольников ABD и BCD равны. AD = BC (по свойству параллелограмма). Тогда в силу утверждения S▲ABD = S▲BCD



Задача 2. На стороне CD параллелограмма ABCD взята произвольная точка E. Зная, что S▲ABE = S, найдите площадь параллелограмма ABCD.

Решение. Проведем дополнительное построение: KE//AD. Тогда из решения задачи 1: следует, что S▲KBE = S▲CBE, а S▲AKE = S▲ADE. Отсюда SABCD = 2S.

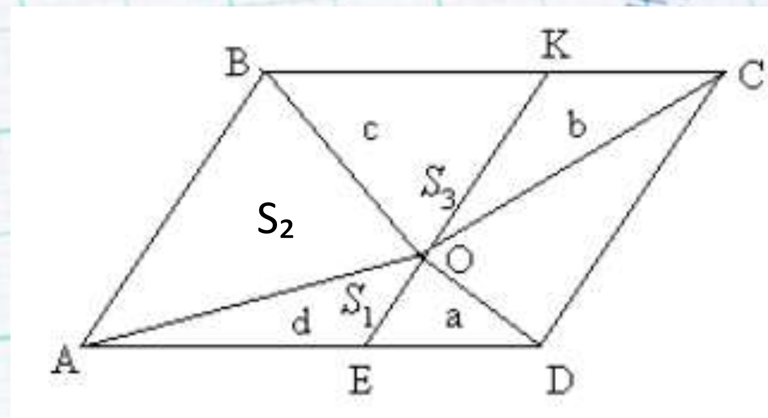


Рассмотрим несколько задач из курса 8 класса:

Задача 4.

Внутри параллелограмма ABCD взята произвольная точка O. Зная площадь трех треугольников с вершиной в точке O, найдите площадь четвертого треугольника.

Решение. Пусть S▲ADO = S1, S▲ABO = S2, S▲BOC = S3. Произведем дополнительное построение: KE||AB. Введем следующие обозначения: S▲EOD = a, S▲KCO = b, S▲BKO = c, S▲AEO = d. Тогда S2 = c +d , S▲DOC = a + b, S1 + S3 = a + b + c + d . Отсюда S▲DCO = S1 + S3 - S2



Использование метода площадей на выпускных экзаменах:

Задача 8

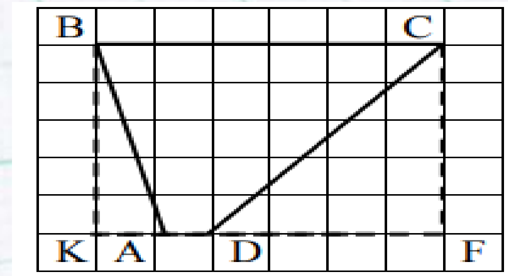
На клетчатой бумаге с клетками размером 1х1 см изображена трапеция. Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах

Решение: S(ABCD)=S(KBCF)-S(KAB)-S(DCF)

S(KBCF) =5·6=30 см²

S(KAB) =1/2·5·1=2,5 см² , S(KAB) =1/2·5·4=10 см²

S(ABCD)=30-2.5-10=17,5 см². Ответ: 17,5 см².



Задача 10. Найти площадь фигуры

Решение: S(ABCD)=S(AMCO)-S(AKB)-S(KMNB)-S(BNC)-S(ADF)-S(DPOF)-S(DCP)

S(AMCO)=5·5=25

S(AKB)=1/2·3·2=3,

S(KMNB)=2·2=4,

S(BNC) =1/2·3·2=3,

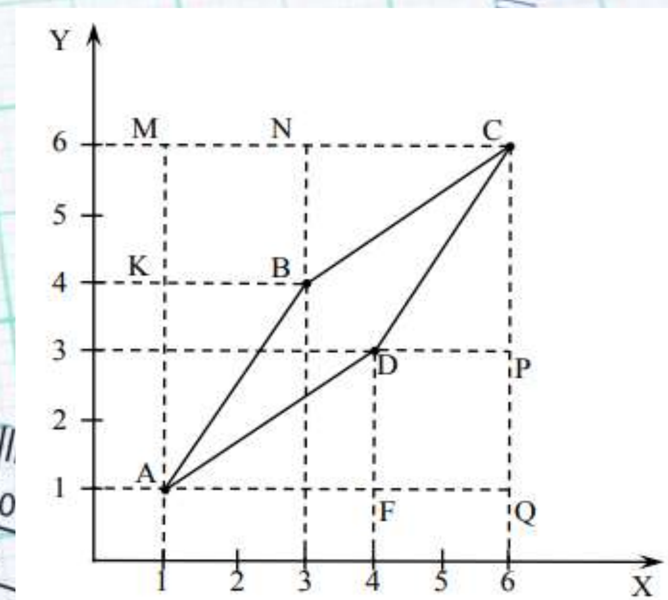
S(ADF)=1/2·3·2=3,

S(DPOF)=2·2=4,

S(DCP) =1/2·3·2=3

S(ABCD)=25-3-4-3-3-4-3=5

Ответ: площадь четырехугольной фигуры равна 5



№1(Задания типа № 24).

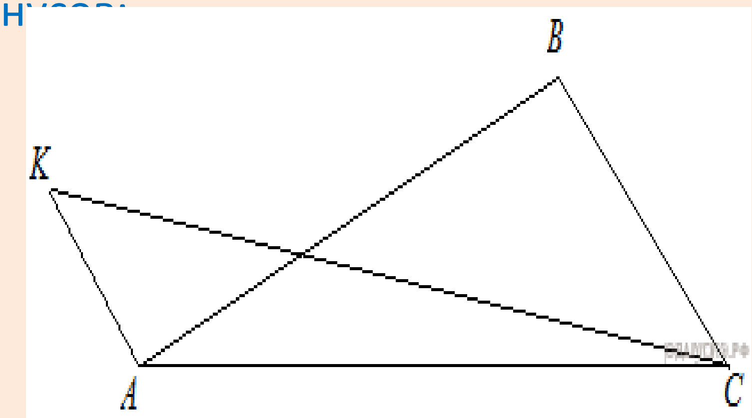
Стороны *AC, AB, BC* треугольника *ABC* равны 2 $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ и 2 соответственно. Точка *K* расположена вне треугольника *ABC* , причём отрезок *KC* пересекает сторону *AB* в точке, отличной от *B*. Известно, что треугольник с вершинами *K, A* и *C* подобен исходному. Найдите косинус угла *AKC*, если ∠*KAC* > 90°. Найти площадь треугольника ABC.

Решение.

Рассмотрим подобные треугольники ABC и AKC, значит ∠KAC = ∠ABC.

Угол ACK заведомо не может быть равен углу   так как он составляет только его часть. Следовательно, угол ACB равен углу AKC.

Найдём косинус угла , используя теорему косинусов:



1) $$\cos\angle AKC = \cos\angle ACB = \frac{14\sqrt{5}}{40}.$$

$$\cos\angle AKC = \cos\angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{20+4-10}{2\cdot 2\sqrt{5}\cdot 2} = \frac{14}{8\sqrt{5}} = \frac{14\sqrt{5}}{40}.$$

2) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \bullet CA \bullet CB \bullet \sin\angle ACB$;

Найдём: $\sin\angle ACB = \sqrt{1 - \cos^2\angle ACB}$;

$$\sqrt{1 - \left(\frac{7\sqrt{5}}{20}\right)^2} = \sqrt{\frac{31}{80}} = \frac{\sqrt{31}}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{155}}{20}.\ S_{ABC} = \frac{\sqrt{155}}{20}$$

Ответ: $\cos\angle AKC = \frac{7\sqrt{5}}{20}$; $S_{ABC} = \frac{\sqrt{155}}{20}$.

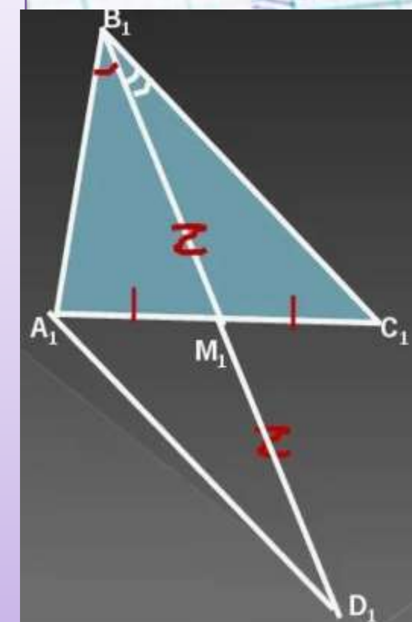
Ещё этот метод применяется в олимпиадных заданиях.

Метод дополнительных построений

Суть метода дополнительных построений при решении геометрических задач: решение планиметрической задачи начинается с построения чертежа, аккуратное выполнение которого помогает найти связи между элементами фигуры и наметить дальнейшие действия.

Дополнение фигур:

- построение параллелограмма, с помощью продления медианы треугольника, что позволяет применять свойства параллелограмма;
- построение дополнительного треугольника;
- построение вспомогательной окружности с целью применения свойств хорд, касательных и углов, связанных с окружностью.

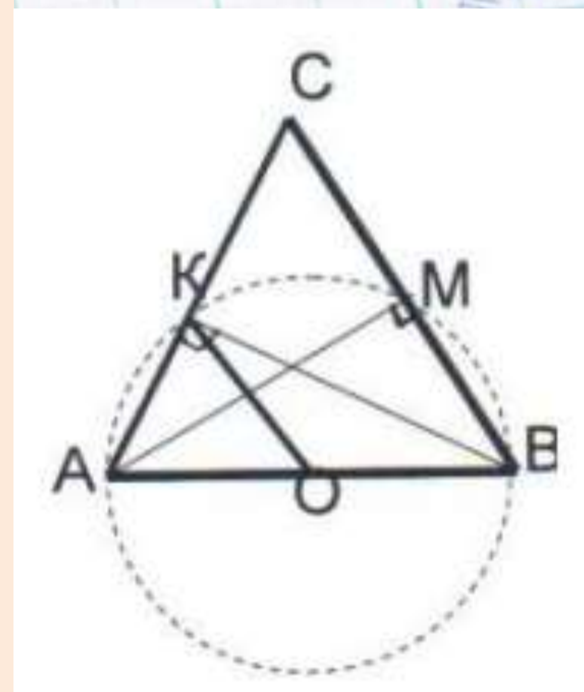


Метод дополнительных построений

Задача 1. В треугольнике АВС проведена высота ВК. Найти длину отрезка, соединяющего точку К с серединой АВ, если АВ = 10 см.

Решение: проведем высоту АМ, тогда углы АКВ и АМВ равны по 90° , значит точки А, К, М, В лежат на одной окружности и АВ – диаметр. Точка О – середина АВ по условию. Следовательно, АО = ОВ = КО = r = 5 см.

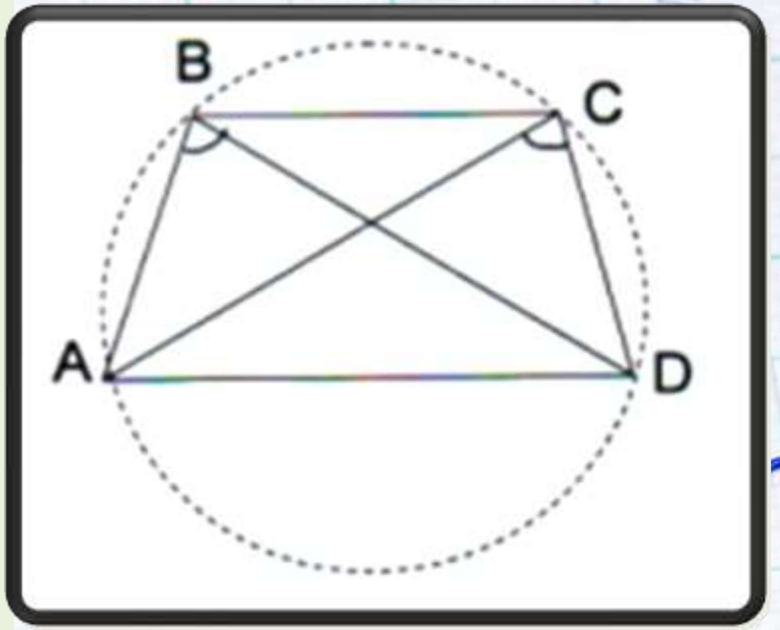
Ответ: 5см.



Метод дополнительных построений

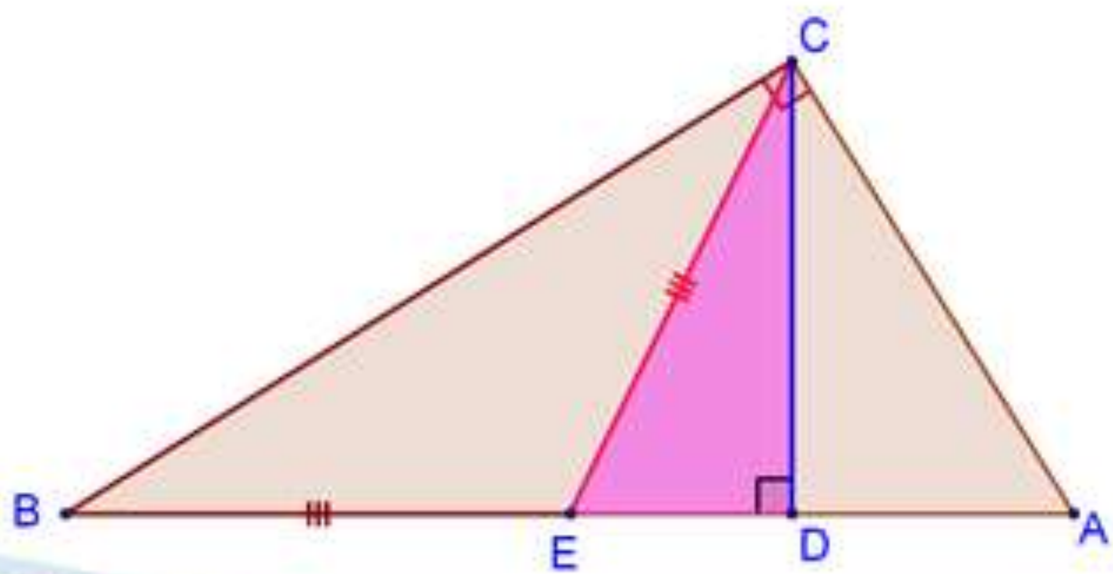
Задача 2. В трапеции ABCD с основаниями AD и BC угол ABD равен углу ACD. Доказать, что ABCD – равнобедренная трапеция.

Решение: Точки B и C лежат по одну сторону от AD и угол ABD = углу ACD, то точки A, B, C, D лежат на окружности. Так как хорды BC ‖ AD, то дуга AB равна дуге CD. Поскольку равные дуги стягивают равны хорды, то AB = CD.



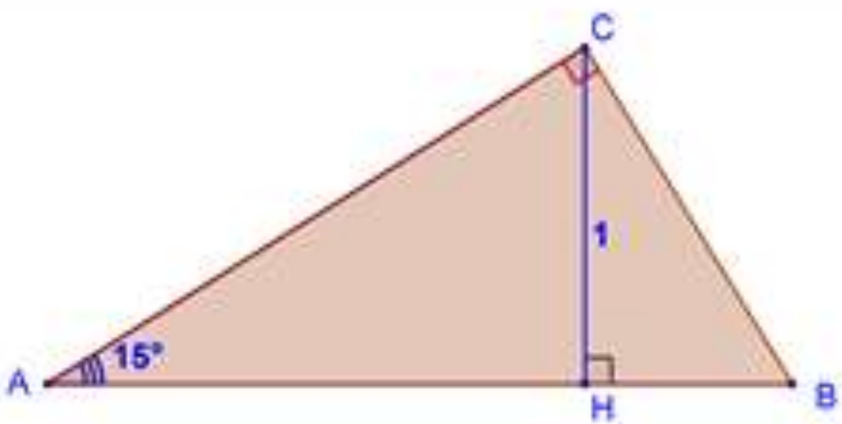
Метод вспомогательных построений

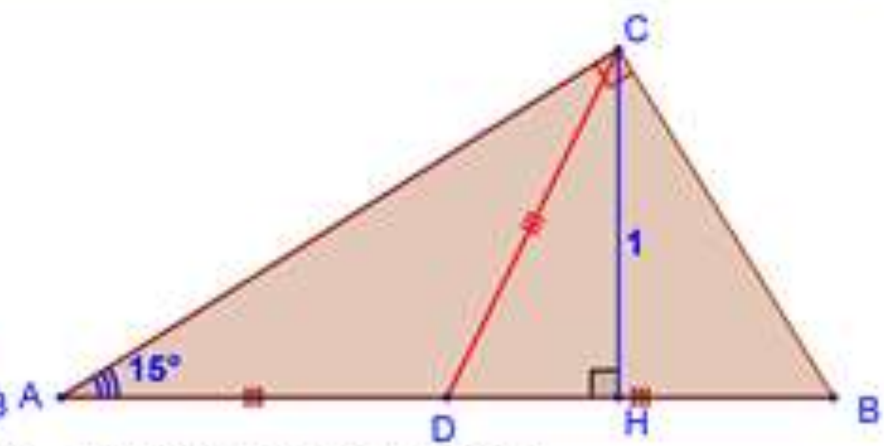
При решении некоторых задач удобно в прямоугольном треугольнике выделять треугольник, образованный медианой и высотой к гипотенузе



Применение свойства медианы к гипотенузе

Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом 15°, если известно, что высота треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1.





Проведем медиану CD к гипотенузе.

ΔACD – равнобедренный $\angle CAD = \angle ACD = 15°$

Применение свойства медианы к гипотенузе

Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 12, а площадь равна 18.

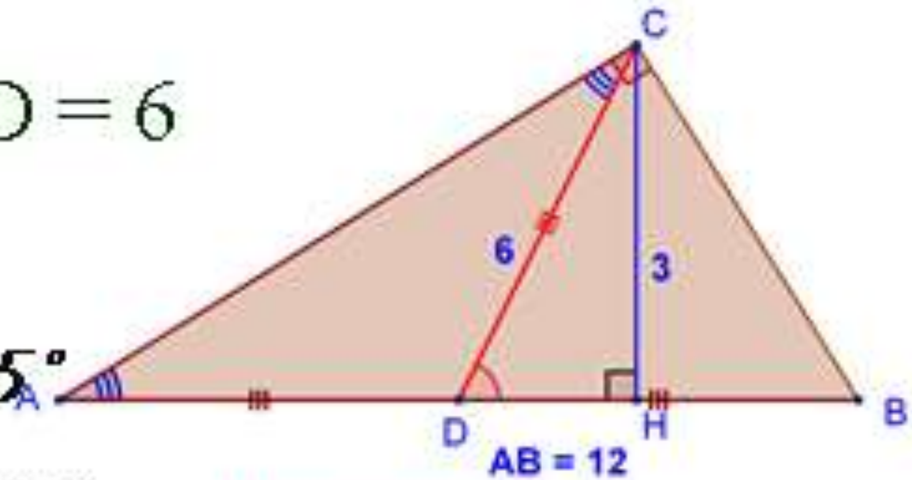
Проведем медиану CD и высоту CH к гипотенузе.

$$CH = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 18}{12} = 3; \quad CD = 6$$

$$\Rightarrow \angle CDH = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle CAD = \angle ACD = 15^\circ$$

$$\angle CBA = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$$

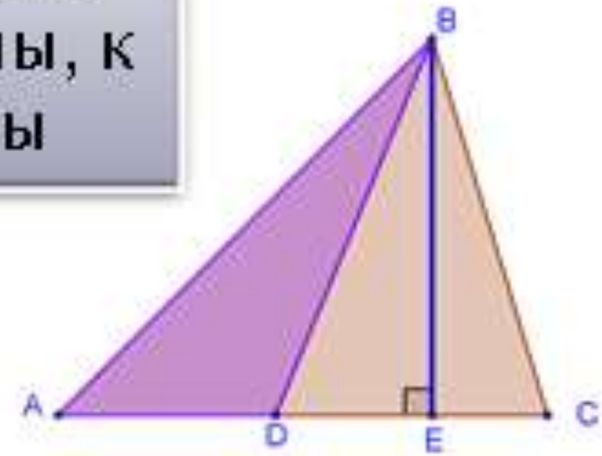


Ответ: *15°; 75°*

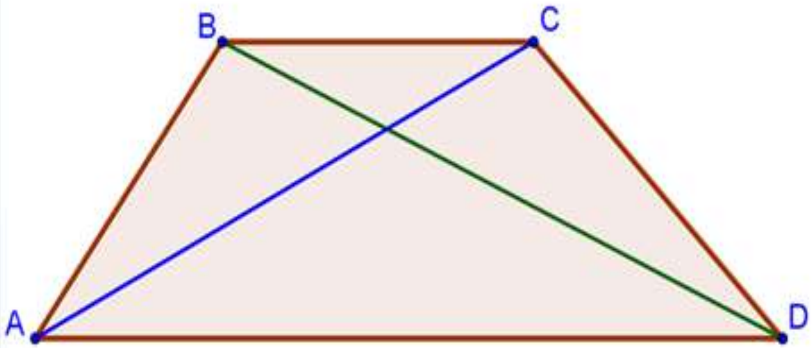
Свойства площади треугольника

Площади треугольников, имеющих общую высоту (равные высоты) , относятся как стороны, к которым эти высоты проведены

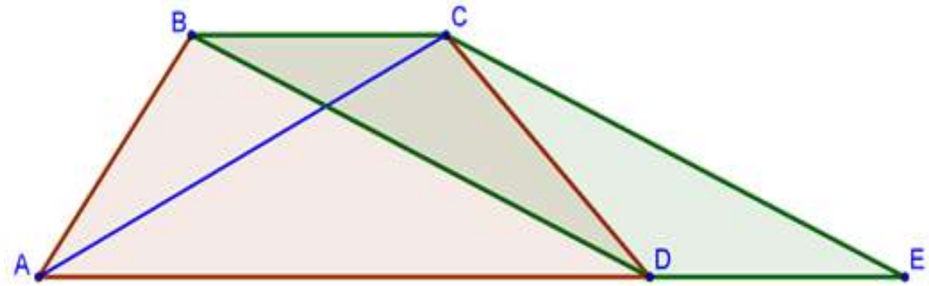
$$\frac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \frac{AD}{DC}$$



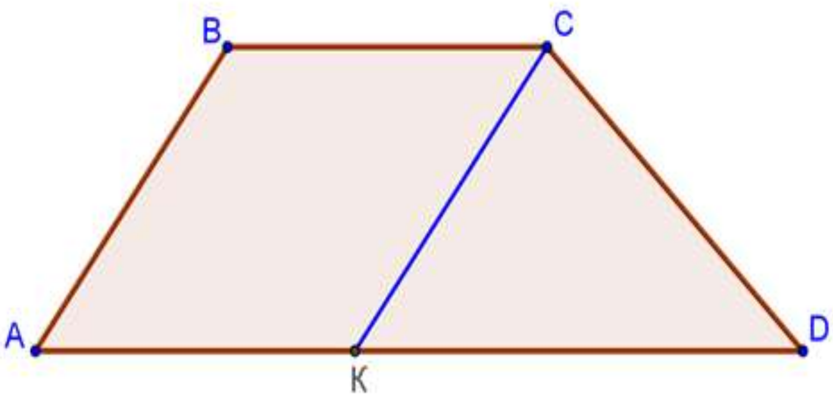
Построение вспомогательных отрезков в трапеции



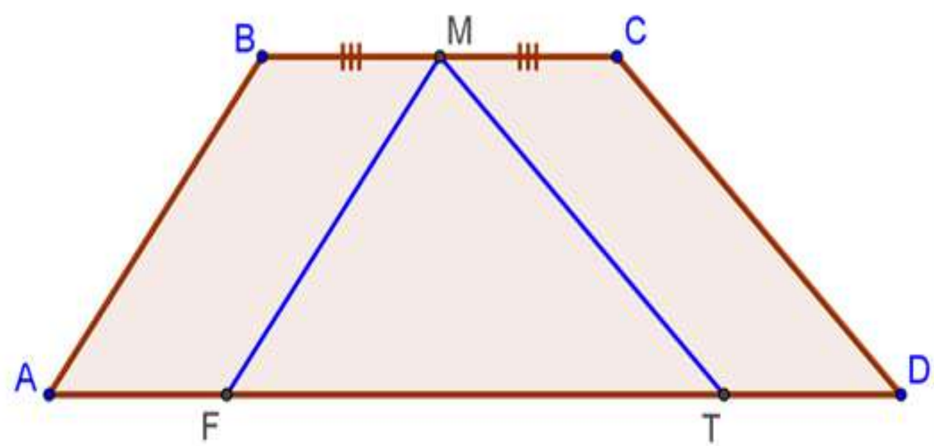
Прямую, параллельную одной из диагоналей трапеции



Прямую, параллельную одной из боковых сторон трапеции

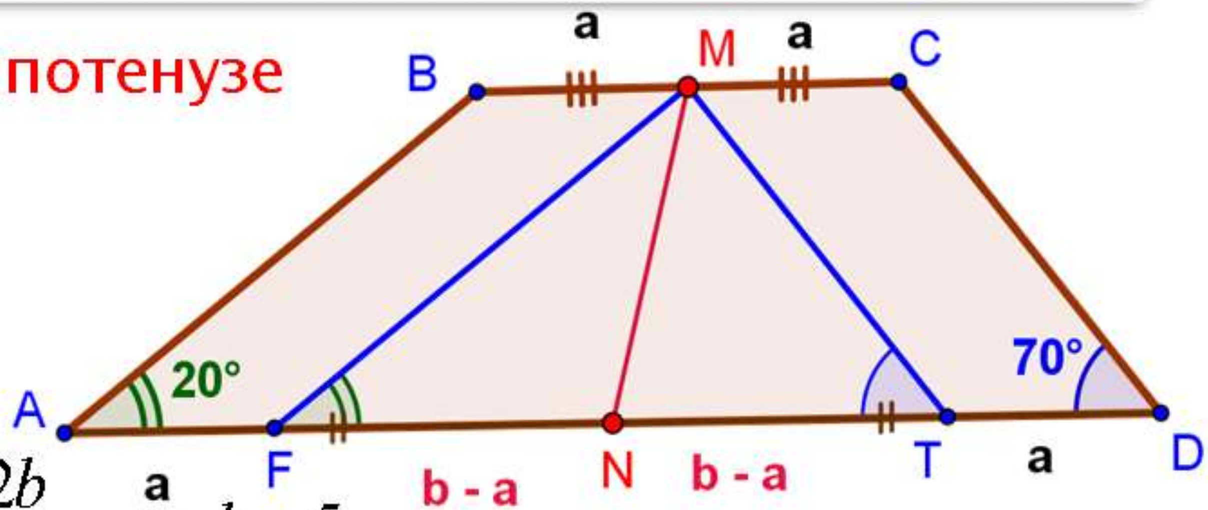


Прямые, параллельные обеим боковым сторонам трапеции



Медиана прямоугольного треугольника к гипотенузе

В трапеции ABCD с основаниями BC и AD $\angle BAD = 20°$, $\angle CDA = 70°$, средняя линия равна 5, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 3. Найдите длину основания AD.



MN– медиана к гипотенузе

FT = 2MN = 6

FT = 2b – 2a = 6

средняя линия KL

$$KL = \frac{BC + AD}{2} = \frac{2a + 2b}{2} = a + b = 5$$

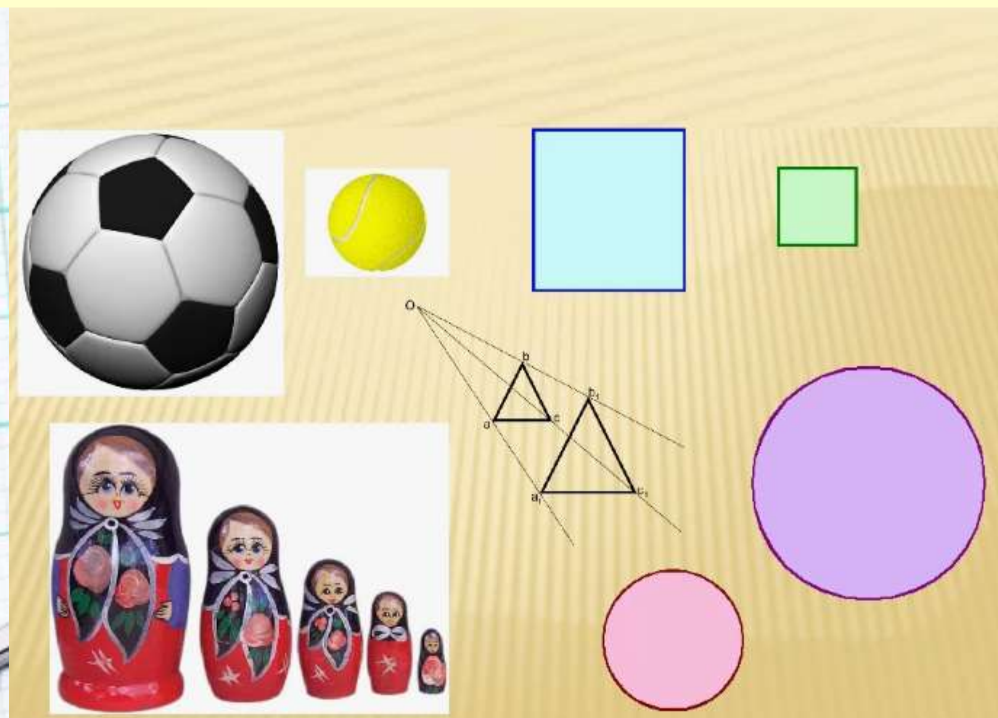
$$\begin{cases} a + b = 5, \\ b - a = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 4, \\ a = 1. \end{cases}$$

AD = 2b = 8

***Ответ:* 8**

Метод подобия

Этот метод применяется в задачах на построение, на доказательство утверждений, а также на определение длин пропорциональных отрезков с помощью свойств подобных треугольников



Метод подобия

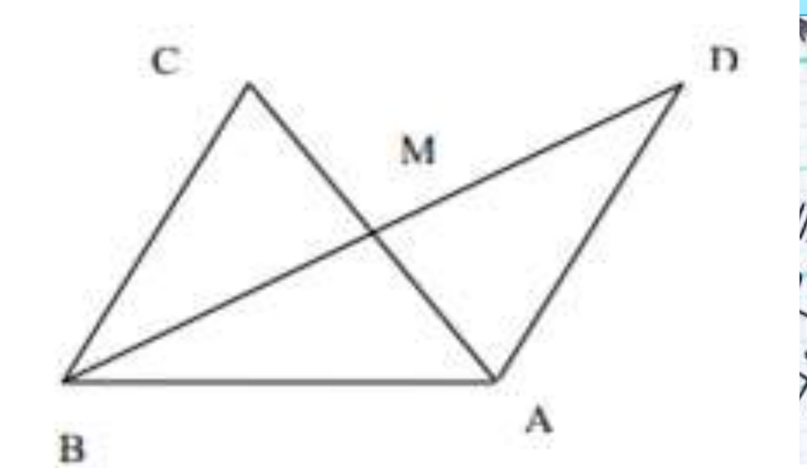
Задача 1. В треугольнике ABC медиана BM в два раза меньше стороны AB и образует с ней угол 40° . Найдите угол ABC.

Решение:

Продлим медиану BM за точку M на ее длину и получим точку D. Так как AB = 2BM, то AB = BD, то есть треугольник ABD — равнобедренный. Следовательно, ∟ BAD= ∟BDA= (180- 40): 2= 70°.

Четырёхугольник ABCD является параллелограммом, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Значит, ∟ CBD = ∟ ADB = 70° . Тогда ∟ ABC = ∟ ABD + ∟ CBD = 110° .

Ответ: 110°.



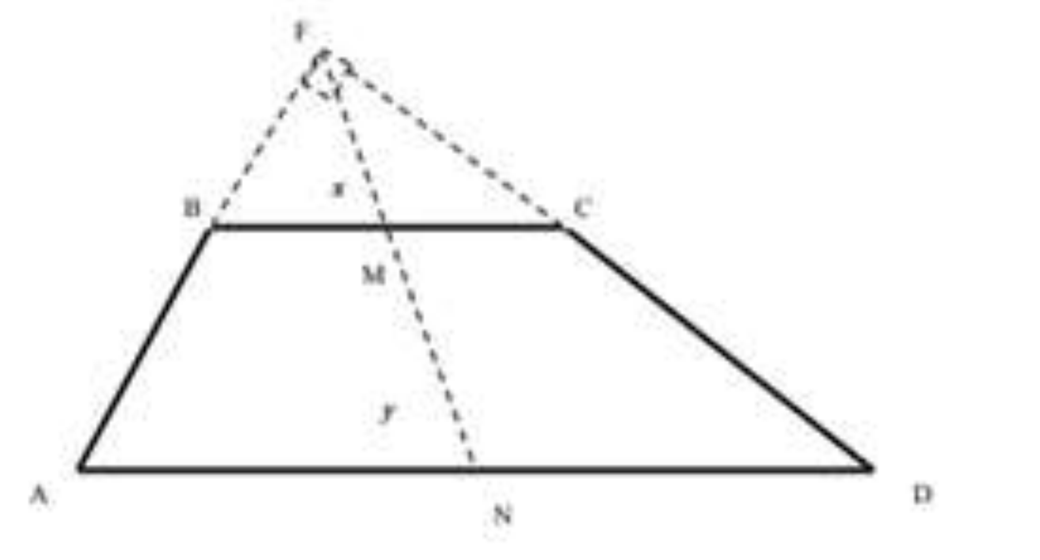
Задача 2. В трапеции длина средней линии равна 4, а углы при одном из оснований имеют величины 40° и 50° . Найти длины оснований трапеции, если длина отрезка, соединяющего середины этих оснований, равна 1.

Решение:

Метод подобия

1. Пусть BC=x, AD=y, то BM=MC=x/2, AN=ND=y/2.
2. Продолжим прямые AB и DC до пересечения в точке F. И заметим, что ? AFD=180°-50°-40°=90° .
3. Следовательно, FM=x/2 (по свойству медиан из прямого угла), FN =x/2.
4. Получаем два уравнения: MN=y/2-x/2=1. И (y+x)/2=4 (по теореме о средней линии трапеции). 5. Получаем x=3, y=5.

Ответ: 3 и 5.



Применяя различные методы и приёмы к решению задач по геометрии, мы формируем сознательное и прочное усвоение теории по геометрии, что требует от учеников аналитического мышления, умения чертить и работать с формулами. Важно также использовать различные методы и приемы для облегчения решения задач.

Обучение математике имеет смысл только тогда, когда оно учит думать, решать задачи. Способность решать задачи гораздо важнее, чем просто владение информацией.