ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН

Решение задач по теории вероятностей повышенного уровня сложности на профильном ЕГЭ 2024

Кулабухов С. Ю.

Теория

Факториалом натурального числа n называется результат произведения $n \cdot (n-1) \ldots 2 \cdot 1$. Факториал числа n обозначается как $n!$.

Перестановкой n элементов называется любой способ расставить их в определённом порядке. Количество перестановок длины n равно $n!$

Размещением из n элементов по k называют любой выбор k элементов, взятых в определённом порядке из n элементов. Число размещений из n элементов по k обозначают A_n^k. Справедлива формула:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Сочетанием из n элементов по k называют любой выбор k элементов, взятых из n элементов (без учёта порядка). Число сочетаний из n элементов по k обозначают C_n^k. Справедлива формула:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Схема Бернулли. Предположим, проводится серия из n идентичных независимых экспериментов. В каждом из них вероятность наступления случайного события A равна p. Тогда вероятность того, что в указанной серии экспериментов событие A наступит ровно k раз ($k \leqslant n$), вычисляется по формуле

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Задача. В ящике лежат гелевые ручки: 8 синих, 6 красных и 2 зелёных. Надя достаёт случайным образом две ручки. Какова вероятность, что она достанет одну синюю и одну красную ручки?

Решение

Будем считать все ручки различными. Результатом эксперимента является неупорядоченная пара ручек, которые достала Надя. Всего есть $C_{16}^2 = \dfrac{16!}{14! \cdot 2!} = \dfrac{16 \cdot 15}{2!} = 120$ равновозможных способов выбрать две ручки. Пару из синей и красной ручки можно составить $6 \cdot 8 = 48$ способами. Следовательно, искомая вероятность равна $\dfrac{48}{120} = 0{,}4$.

Ответ: 0,4.

Задача. Петя бросает симметричную монету 26 раз. Во сколько раз вероятность события «решка выпадет ровно 7 раз» превосходит вероятность события «решка выпадет ровно 5 раз»?

Решение

Вероятность того, что решка выпадет ровно 7 раз в серии испытаний из 26 бросков (используем схему Бернулли), равна $C_{26}^{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{19}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{7}=\frac{26!}{7!\cdot 19!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{26}$.

Вероятность того, что решка выпадет ровно 5 раз в серии испытаний из 26 бросков (используем схему Бернулли), равна $C_{26}^{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{21}=\frac{26!}{5!\cdot 21!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{26}$.

Искомое отношение равно $\dfrac{\frac{26!}{7!\cdot 19!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{26}}{\frac{26!}{5!\cdot 21!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{26}}=\frac{5!\cdot 21!}{7!\cdot 19!}=\frac{5!}{7!}\cdot\frac{21!}{19!}=\frac{1}{6\cdot 7}\cdot\frac{21\cdot 20}{1}=10.$

Ответ: 10.

Задача. Стрелок Алексей стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,6. Во сколько раз вероятность события «Алексей поразит ровно четыре мишени» больше вероятности события «Алексей поразит ровно три мишени»?

Решение

Не попадёт в цель за 2 выстрела с вероятностью $0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$.

Попадёт в цель за 2 выстрела с вероятностью $1 - 0{,}16 = 0{,}84$.

A — «Алексей поразит ровно 4 мишени» $\quad P(A) = C_5^4 \cdot (0{,}84)^4 \cdot (0{,}16)^1$

B — «Алексей поразит ровно 3 мишени». $\quad P(B) = C_5^3 \cdot (0{,}84)^3 \cdot (0{,}16)^2$

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{C_5^4 \cdot (0{,}84)^4 \cdot (0{,}16)^1}{C_5^3 \cdot (0{,}84)^3 \cdot (0{,}16)^2} = \frac{\frac{5!}{4!1!} \cdot (0{,}84)^1}{\frac{5!}{3!2!} \cdot (0{,}16)^1} = 2{,}625$$

Ответ: 2,625.

Теория

Условная вероятность

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ если } P(B) \neq 0$$

Формула полной вероятности

Пусть результате эксперимента обязательно наступает ровно одно из событий $H_1, H_2, \ldots, H_m$ (гипотезы), причём вероятность каждого из них не равна 0.

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \ldots + P(A|H_m)P(H_m)$$

Формула Байеса

$$P(H_k|A) = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{P(A)}, \text{ где } P(A) \neq 0$$

Задача. В ящике 8 фломастеров: 5 красных и 3 зелёных. Катя вытаскивает фломастеры по очереди. Какова вероятность, что в первый раз зелёный фломастер она вытащит четвёртым по счёту? Ответ округлите до сотых.

Решение

Вероятность того, что первым Катя вытащит красный фломастер, равна $\frac{5}{8}$.

Если это событие наступит, то вероятность вытащить снова красный фломастер станет равна $\frac{4}{7}$.

Аналогично вероятность вытащить третий красный фломастер при условии того, что первые два — красные, равна $\frac{3}{6}$.

Вероятность того, что первые три вытащенных фломастера — красные, равна $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{28}$.

Если первые три вытащенных фломастера — красные, то вероятность четвёртым вытащить зелёный равна $\frac{3}{5}$.

Искомая вероятность равна $\frac{5}{28} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{28} = 0{,}107\ldots \approx 0{,}11$.

Ответ: 0,11.

Задача. В ресторане администратор предлагает гостям сыграть в следующую игру: гость бросает одновременно две игральные кости. Если он бросит комбинацию 3 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплимент от повара: мини-пиццу. Какова вероятность получить комплимент от повара? Ответ округлите до сотых.

Решение 1

Рассмотрим две гипотезы:
H_1 — при первом броске выпала нужная комбинация и
H_2 — при первом броске не выпала нужная комбинация.

$P(H_1) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, так как из 36 упорядоченных пар ровно две удовлетворяют требованию: (3; 6) и (6; 3).

$$P(H_2) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}.$$

Событие A — «клиент получил комплимент от повара в результате этой игры».

$$P(A|H_1) = 1, \quad P(A|H_2) = \frac{1}{18}.$$

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2).$$

$$P(A) = 1 \cdot \frac{1}{18} + \frac{1}{18} \cdot \frac{17}{18} = \frac{35}{324} = 0{,}108\ldots \approx 0{,}11.$$

Ответ: 0,11.

Задача. В ресторане администратор предлагает гостям сыграть в следующую игру: гость бросает одновременно две игральные кости. Если он бросит комбинацию 3 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплимент от повара: мини-пиццу. Какова вероятность получить комплимент от повара? Ответ округлите до сотых.

Решение 2

Найдём вероятность противоположного события — в обеих попытках нужная комбинация не выпала.

При одной попытке вероятность выпадения нужной комбинации равна $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$,

так как из 36 упорядоченных пар, ровно две удовлетворяют требованию: (3; 6) и (6; 3).

Вероятность невыпадения нужной комбинации равна $1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$.

Оба раза нужная комбинация не выпала с вероятностью $\frac{17}{18} \cdot \frac{17}{18} = \frac{289}{324}$.

Искомая вероятность равна $1 - \frac{289}{324} = \frac{35}{324} = 0{,}108\ldots \approx 0{,}11$.

Ответ: 0,11.

5 В городе 48% взрослого населения – мужчины. Пенсионеры составляют 12,6% взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 15%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Решение 1

Пусть H_1 — событие «наугад выбранный взрослый является мужчиной», $P(H_1) = 0{,}48$;

H_2 — событие «наугад выбранный взрослый является женщиной», $P(H_2) = 1 - 0{,}48 = 0{,}52$;

A — событие «наугад выбранный взрослый является пенсионером», $P(A) = 0{,}126$.

Тогда $A \mid H_1$ — событие «наугад выбранный мужчина является пенсионером», его вероятность нужно найти;

$A \mid H_2$ — событие «наугад выбранная женщина является пенсионером», его вероятность $P(A \mid H_2) = 0{,}15$;

Запишем формулу полной вероятности $P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)$

и подставим в неё известные вероятности $0{,}126 = 0{,}48 \cdot P(A \mid H_1) + 0{,}52 \cdot 0{,}15$;

$$P(A \mid H_1) = \frac{0{,}126 - 0{,}52 \cdot 0{,}15}{0{,}48} = 0{,}1.$$

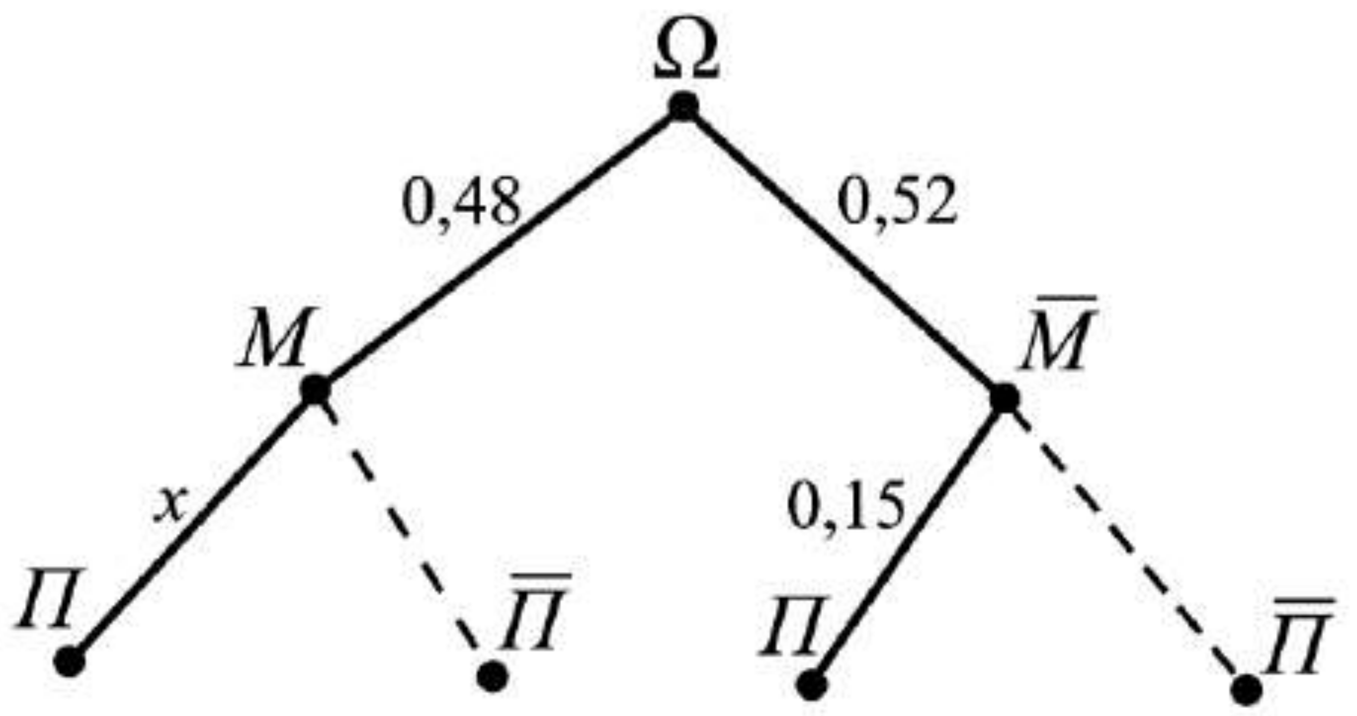
Ответ: 0,1.

5 В городе 48% взрослого населения – мужчины. Пенсионеры составляют 12,6% взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 15%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Решение 2

Пусть M — событие «наугад выбранный взрослый является мужчиной», $P(M)=0{,}48$;
$\overline{M}$ — событие «наугад выбранный взрослый является женщиной», $P(\overline{M})=1-0{,}48=0{,}52$;
$П$ — событие «наугад выбранный взрослый является пенсионером», $P(П)=0{,}126$;
Ω — событие «наугад выбираем взрослого».

Изобразим эксперимент графически деревом вероятностей:
(x — величина искомой вероятности)



Из рисунка получаем $P(П)=0{,}48x+0{,}52\cdot 0{,}15=0{,}126$;

$$x=\frac{0{,}126-0{,}52\cdot 0{,}15}{0{,}48}=0{,}1.$$

Ответ: 0,1.

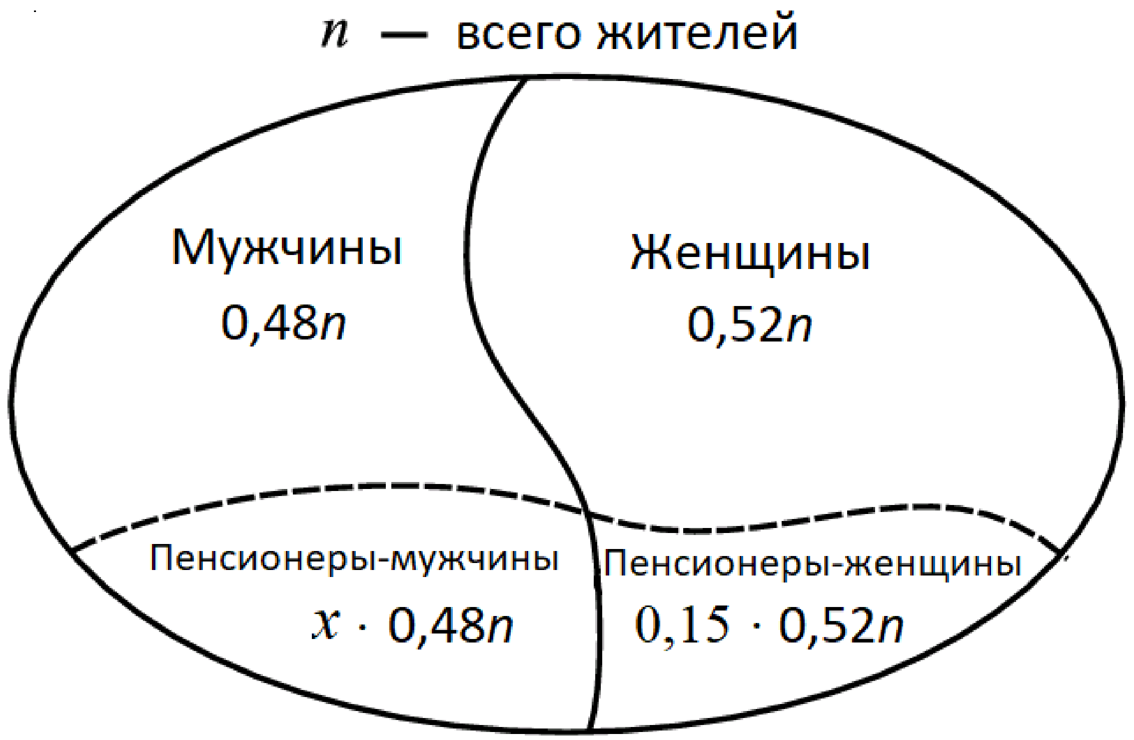
5 В городе 48% взрослого населения – мужчины. Пенсионеры составляют 12,6% взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 15%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Решение 3

Пусть всего в городе n жителей. Тогда в городе:
$0{,}48n$ мужчин;
$0{,}52n$ женщин;
$0{,}126n$ пенсионеров;
$0{,}15 \cdot 0{,}52n$ женщин-пенсионеров.

Пусть x — доля пенсионеров среди мужчин.

Тогда в городе $x \cdot 0{,}48n$ мужчин-пенсионеров.



Получим уравнение $0{,}15 \cdot 0{,}52n + x \cdot 0{,}48n = 0{,}126n.$

$$52 \cdot 1{,}5 + 480x = 126;$$

$$78 + 480x = 126;$$

$$x = \frac{126 - 78}{480} = \frac{48}{480} = 0{,}1.$$

Согласно классическому определению вероятности, вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером» равна 0,1.

Ответ: 0,1.

$\boxed{5}$ Семён бросал игральную кость до тех пор, пока сумма очков не превысила число 10. Найдите вероятность того, что потребовалось ровно 2 броска. Ответ округлите до сотых.

Решение 1

Пусть H_i — событие, заключающееся в том, что при первом броске выпало i очков.

Тогда $P(H_i) = \dfrac{1}{6}$ для любого целого i от 1 до 6.

Пусть событие A — «сумма очков превысила 10 при втором броске».

$$P(A) = P(A \mid H_1)P(H_1) + P(A \mid H_2)P(H_2) + P(A \mid H_3)P(H_3) + \ldots + P(A \mid H_6)P(H_6) =$$
$$= P(A \mid H_1) \cdot \frac{1}{6} + P(A \mid H_2) \cdot \frac{1}{6} + P(A \mid H_3) \cdot \frac{1}{6} + \ldots + P(A \mid H_6) \cdot \frac{1}{6}.$$

$P(A \mid H_5) = \dfrac{1}{6}$ (если при первом броске выпало 5 очков, то при втором броске должно выпасть 6 очков — единственный вариант из шести).

$P(A \mid H_6) = \dfrac{2}{6}$ (если при первом броске выпало 6 очков, то при втором броске должно выпасть 5 или 6 очков — два варианта из шести).

$P(A \mid H_i) = 0$ при $i \leqslant 4$ (если при первом броске выпало 4 очка или меньше, то сумма очков за первые два броска не превысит 10, то есть событие A при таких условиях невозможно).

Отсюда $P(A) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{12} = 0{,}083\ldots \approx 0{,}08$.

Ответ: 0,08.

$\boxed{5}$ Семён бросал игральную кость до тех пор, пока сумма очков не превысила число 10. Найдите вероятность того, что потребовалось ровно 2 броска. Ответ округлите до сотых.

Решение 2

За один бросок невозможно выбросить более 10 очков.

Значит, надо найти вероятность того, что сумма очков за два броска превысит 10.

В результате двух бросков наступает один из 36 равновозможных исходов (каждый исход представляет собой упорядоченную пару, в которой на первом месте стоит число выпавших очков при первом броске, а на втором — число очков при втором броске).

Ровно 3 исхода благоприятствуют событию «сумма выпавших очков за два броска превысила 10» — это исходы $(5;\ 6)$, $(6;\ 5)$, $(6;\ 6)$.

Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0{,}083\ldots \approx 0{,}08$.

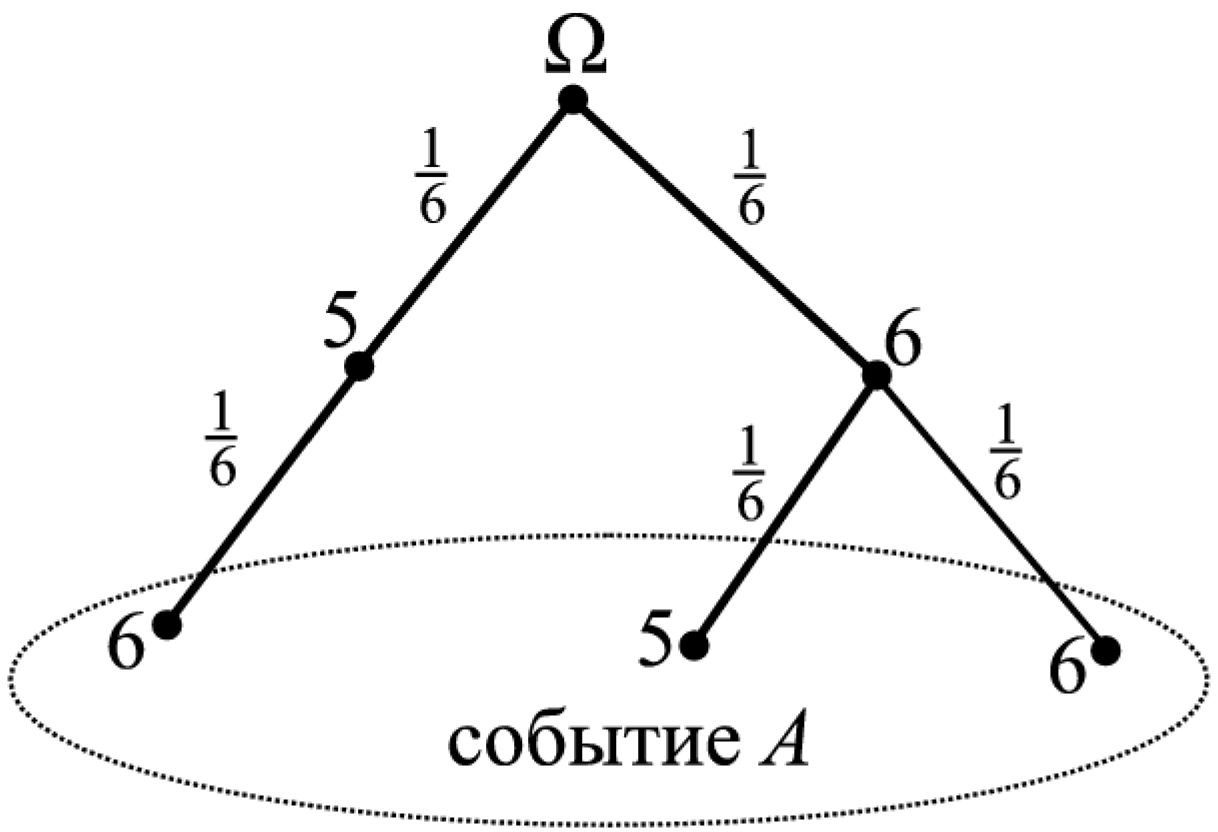
Ответ: 0,08.

5 Семён бросал игральную кость до тех пор, пока сумма очков не превысила число 10. Найдите вероятность того, что потребовалось ровно 2 броска. Ответ округлите до сотых.

Решение 3

Пусть A — событие «сумма очков превысила 10 при втором броске».

Изобразим фрагмент дерева вероятности.



Из рисунка получаем $P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \approx 0{,}08$.

Ответ: 0,08.

5 У Вадима есть два игральных кубика. Первый из них обычный, а на гранях второго кубика числа 2 и 4 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковые. Вадим наудачу выбрал один из двух кубиков и бросил его два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 2 и 4 очка. Какова вероятность того, что он бросил второй кубик?

Решение 1

Рассмотрим две гипотезы:

H_1 — «был взят первый кубик», H_2 — «был взят второй кубик».

По условию обязательно наступает ровно одна из этих гипотез, и $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$.

Пусть событие A — «в каком-то порядке выпали числа 2 и 4».

Тогда $P(A|H_1) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$. (Вероятность того, что сначала выпало 2, а затем 4, равна $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Аналогично, вероятность того, что сначала выпало 4, а затем 2, тоже равна $\frac{1}{36}$.)

$P(A|H_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. (Вероятность того, что сначала выпало 2, а затем 4, равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Аналогично, вероятность того, что сначала выпало 4, а затем 2, тоже равна $\frac{1}{4}$.)

По формуле полной вероятности получаем, что

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{18} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}.$$

Искомая вероятность $P(H_2|A) = \dfrac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{18}} = 0{,}9.$

Ответ: 0,9.

Решение 2

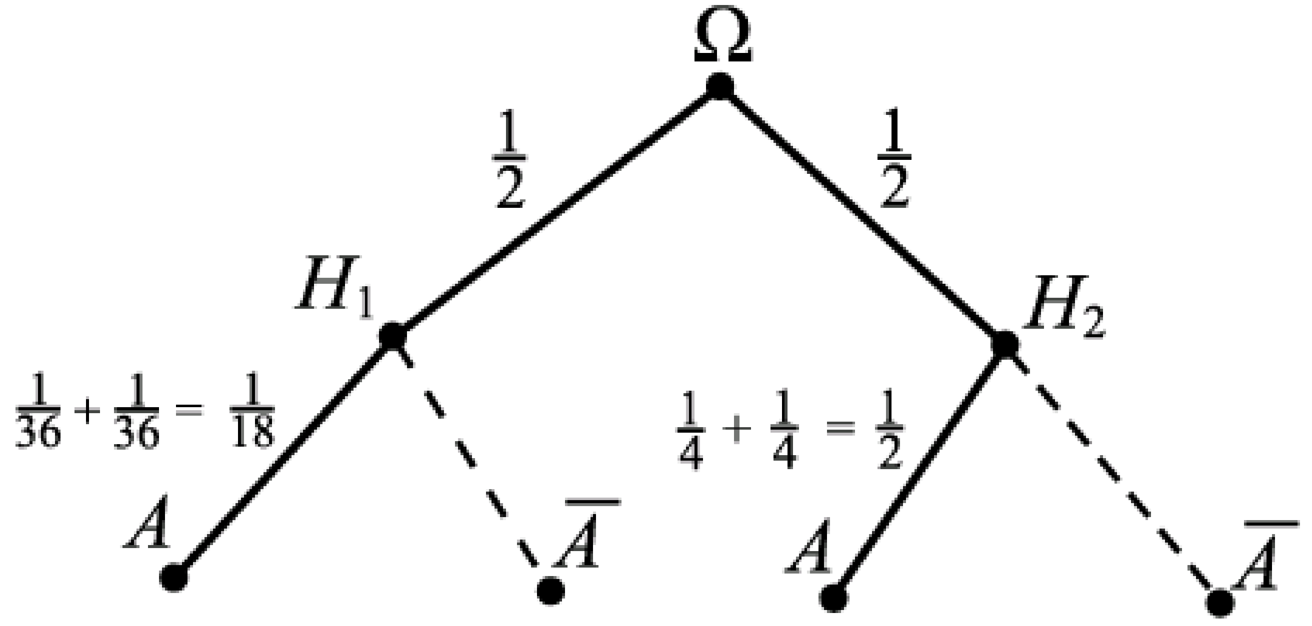
Рассмотрим две гипотезы:

H_1 — «был взят первый кубик», H_2 — «был взят второй кубик».

Пусть событие A — «в каком-то порядке выпали числа 2 и 4».

По определению $P(H_2 \mid A) = \dfrac{P(H_2 \cap A)}{P(A)}$, где $H_2 \cap A$ — событие «был взят второй кубик и при двух бросках его в каком-то порядке выпали 2 и 4 очка».

Изобразим эксперимент графически деревом вероятностей:



Из рисунка получаем $P(A) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{18}$.

Найдём вероятность $P(H_2 \cap A)$ по классическому определению.

Всего исходов. $6 \cdot 6 = 36$ при броске первого кубика и 36 при броске второго. Всего 72 исхода.

Благоприятных исходов. Бросаем второй кубик. 2 очка при первом броске может выпасть на 3-х гранях кубика, 4 очка при втором броске может выпасть тоже на 3-х гранях. Всего $3 \cdot 3 = 9$ способов получить последовательно 2 и 4 очка. Аналогично получаем 9 способов для последовательности 4 и 2 очка.

Итак, $P(H_2 \cap A) = \dfrac{3 \cdot 3 + 3 \cdot 3}{6 \cdot 6 + 6 \cdot 6} = \dfrac{18}{72} = \dfrac{1}{4}$.

Таким образом, $P(H_2 \mid A) = \dfrac{P(H_2 \cap A)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{18}} = \dfrac{18}{20} = \dfrac{9}{10} = 0{,}9.$

Ответ: 0,9.

Решение 3

2 или 4 очка при броске какого-то кубика могло выпасть в следующих случаях.

1. Если бросали первый кубик, то возможны 2 элементарных исхода $(2; 4)$ и $(4; 2)$.

2. Если бросали второй кубик, то возможны 18 элементарных исходов.
Чтобы перечислить их будем считать, что грани, на которых изображены одинаковые числа окрашены в разные цвета:
к — красный, з — зелёный и с — синий.
9 исходов, в которых при первом броске выпало 2, а при втором 4:

$$(2к; 4к), (2к; 4з), (2к; 4с),$$
$$(2з; 4к), (2з; 4з), (2з; 4с),$$
$$(2с; 4к), (2с; 4з), (2с; 4с).$$

И 9 исходов, в которых при первом броске выпало 4, а при втором 2:

$$(4к; 2к), (4к; 2з), (4к; 2с),$$
$$(4з; 2к), (4з; 2з), (4з; 2с),$$
$$(4с; 2к), (4с; 2з), (4с; 2с).$$

Искомая вероятность равна $\frac{18}{20} = 0{,}9$.

Ответ: 0,9.

$\boxed{5}$ При подозрении на наличие некоторого заболевания пациента отправляют на ПЦР-тест. Если заболевание действительно есть, то тест подтверждает его в 88 % случаев. Если заболевания нет, то тест выявляет отсутствие заболевания в среднем в 92 % случаев. Известно, что в среднем тест оказывается положительным у 11 % пациентов некоторой поликлиники, направленных на тестирование. При обследовании пациента А. врач направил его на ПЦР-тест, который оказался положительным. Какова вероятность того, что пациент А. действительно имеет это заболевание?

Решение 1

Пусть эксперимент заключается в выборе одного случайного пациента, направленного на анализ.

A — «у наудачу взятого пациента тест дал положительный результат». По условию $P(A) = 0{,}11$.

H_1 — «этот пациент болен», H_2 — «этот пациент не болен». $P(A|H_1) = 0{,}88$, $P(A|H_2) = 1 - 0{,}92 = 0{,}08$.

$P(H_1) = x$, $P(H_2) = 1 - x$. $P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = 0{,}88x + 0{,}08(1 - x)$.

Получим уравнение $0{,}88x + 0{,}08(1 - x) = 0{,}11$; $x = \dfrac{3}{80}$.

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}88 \cdot \frac{3}{80}}{0{,}11} = 0{,}3.$$

Ответ: 0,3.

Решение 2

Пусть эксперимент заключается в выборе одного случайного пациента, направленного на анализ.

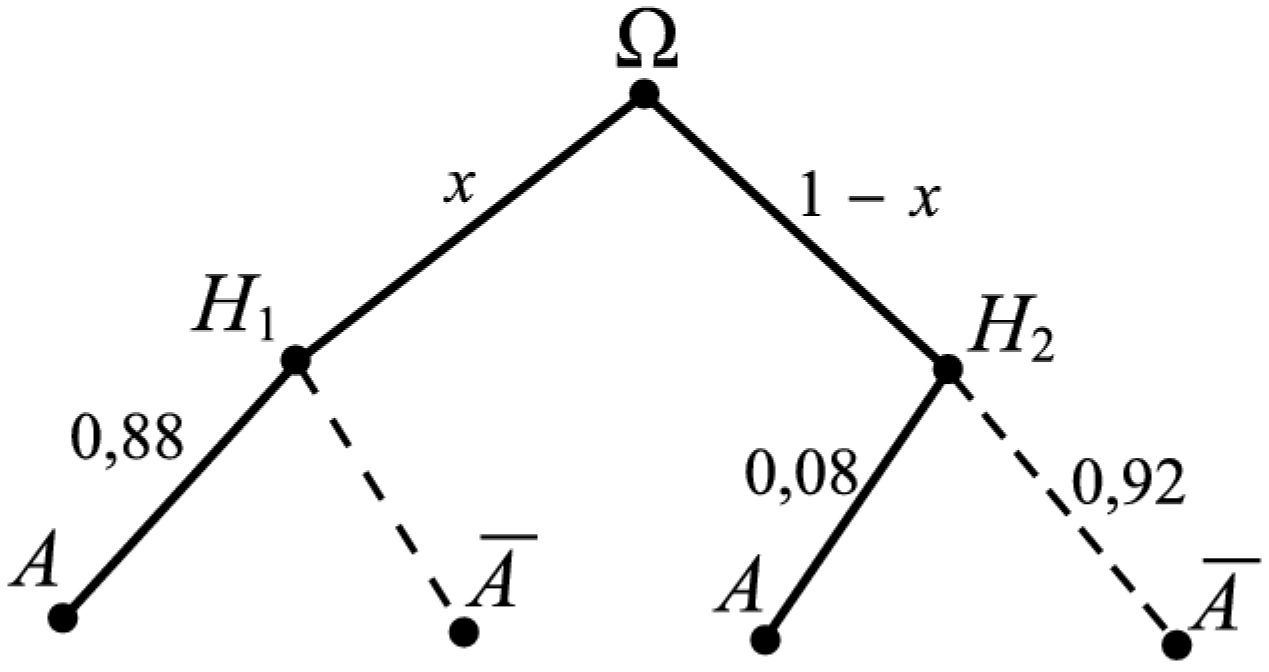
1. Пусть A — событие «у наудачу выбранного пациента тест дал положительный результат», $P(A) = 0{,}11$;

H_1 — событие «этот пациент болен»;

H_2 — событие «этот пациент не болен».

Пусть $P(H_1) = x$, тогда $P(H_2) = 1 - x$.

Изобразим эксперимент графически деревом вероятностей:



Из рисунка получаем $P(A) = 0{,}88x + 0{,}08(1 - x) = 0{,}11$;

$x = \dfrac{3}{80}$, $P(H_1) = \dfrac{3}{80}$.

2. Необходимо найти $P(H_1 \mid A) = \dfrac{P(H_1 \cap A)}{P(A)}$.

Пусть всего направлено на тестирование n пациентов.

Тогда: $0{,}11n$ пациентов получили положительный результат теста; $\dfrac{3}{80}n$ пациентов больны;

$0{,}88 \cdot \dfrac{3}{80}n = 0{,}033n$ больных пациентов, тест которых положительный.

Тогда по классическому определению вероятности $P(H_1 \cap A) = \dfrac{0{,}033n}{n} = 0{,}033$.

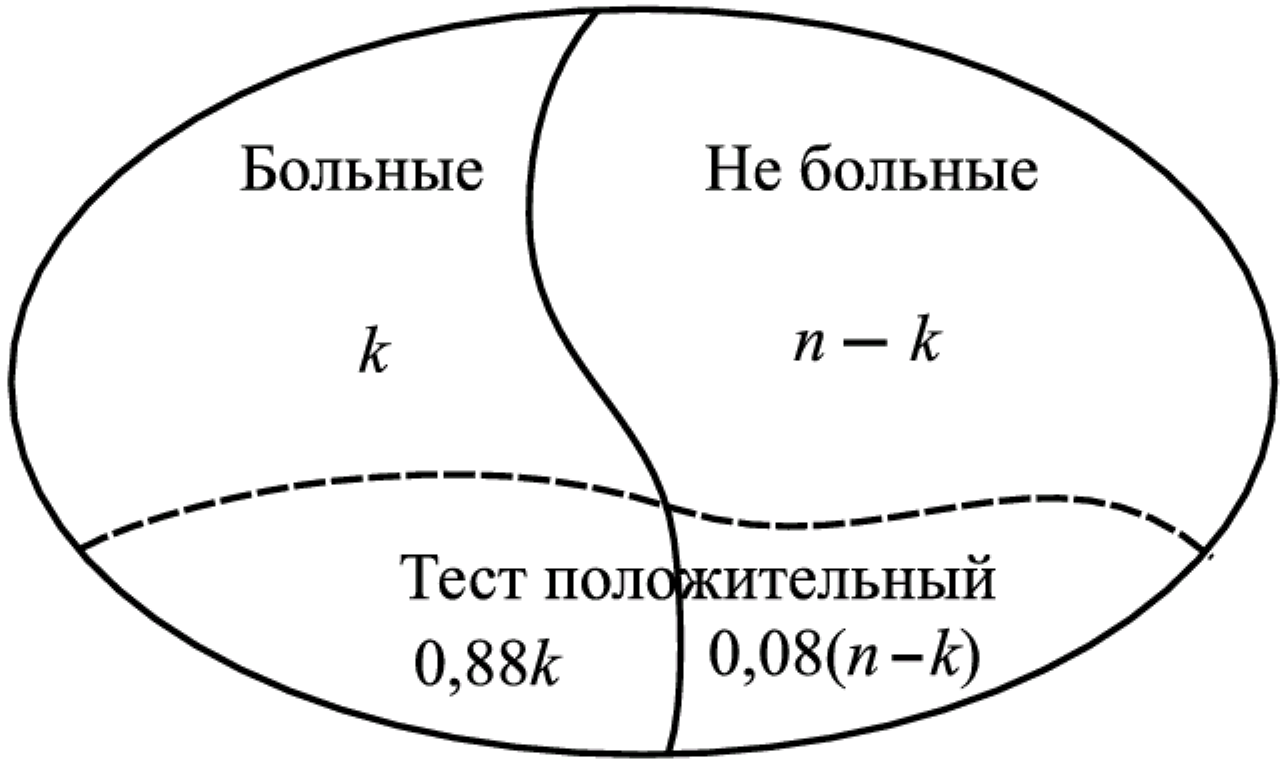
Таким образом, $P(H_1 \mid A) = \dfrac{P(H_1 \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}033}{0{,}11} = 0{,}3$.

Ответ: 0,3.

Решение 3

Пусть всего направлено на тестирование n пациентов, из них k больных и $(n-k)$ не больных.

Тогда: $0{,}11n$ — пациентов с положительным тестом;
$0{,}88k$ — больных с положительным тестом;
$0{,}92(n-k)$ — не больных с отрицательным тестом;
$0{,}08(n-k)$ — не больных с положительным тестом.



Получим уравнение $0{,}88k + 0{,}08(n-k) = 0{,}11n$;

$$0{,}88\frac{k}{n} + 0{,}08\left(1 - \frac{k}{n}\right) = 0{,}11.$$

Отсюда $\dfrac{k}{n} = \dfrac{3}{80}$, $k = \dfrac{3}{80}n$.

Тогда больных с положительным тестом $0{,}88k = 0{,}88 \cdot \dfrac{3}{80}n = 0{,}033n$.

Искомая вероятность того, что наугад выбранный пациент с положительным тестом действительно болен

$$P = \frac{0{,}033n}{0{,}11n} = 0{,}3.$$

Ответ: 0,3.

5 В некотором турнире участвуют 80 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из турнира, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых двадцати трёх играх победила команда «Ветер». Какова вероятность того, что эта команда выиграет двадцать четвёртый раунд?

Решение 1

Пусть событие A — «Команда "Ветер" выиграла первые двадцать три раунда турнира»,

событие B — «Команда "Ветер" выиграла двадцать четвёртый раунд турнира».

Тогда $B \cap A$ — «Команда "Ветер" выиграла первые двадцать четыре раунда турнира».

Искомую вероятность $P(B \mid A)$ найдём по формуле $P(B \mid A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$.

1. Найдём $P(A)$.

Для наступления события A необходимо, чтобы "Ветер" вступил в турнир в первом раунде и оказался самой сильной командой среди первых двадцати четырёх, которые участвуют в этих двадцати трёх раундах.

Вероятность того, что "Ветер" вступит в турнир в первом раунде, то есть под номером 1 или 2, равна $\dfrac{2}{80}$, так как "Ветер" имеет одинаковые шансы вступить под любым номером от 1 до 80.

Вероятность того, что "Ветер" будет самой сильной командой при этом условии равна $\dfrac{1}{24}$, так как мы с одинаковой вероятностью можем предполагать любую силу команды "Ветер", а всего в первых двадцати трёх раундах участвуют двадцать четыре команды.

Тогда $P(A) = \dfrac{2}{80} \cdot \dfrac{1}{24}$.

Решение (продолжение)

2. Найдём $P(B \cap A)$.

$B \cap A$ — событие «Команда "Ветер" выиграла первые двадцать четыре раунда турнира».

Событие $B \cap A$ полностью аналогично событию A, только вместо двадцати трёх первых раундов рассматриваются двадцать четыре. $P(B \cap A) = \dfrac{2}{80} \cdot \dfrac{1}{25}$.

Отсюда $P(B \mid A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{\dfrac{2}{80} \cdot \dfrac{1}{25}}{\dfrac{2}{80} \cdot \dfrac{1}{24}} = \dfrac{\dfrac{1}{25}}{\dfrac{1}{24}} = \dfrac{24}{25} = 0{,}96.$

Ответ: 0,96.

$\boxed{5}$ В некотором турнире участвуют 80 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из турнира, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых двадцати трёх играх победила команда «Ветер». Какова вероятность того, что эта команда выиграет двадцать четвёртый раунд?

Решение 2

Тот факт, что команда x слабее команды y обозначим $x < y$.

По условию в первых 23-х играх победила команда «Ветер», значит, существуют такие 23 команды $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{23}$, что

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{23} < \text{«Ветер»}.$$

В 24-й игре команда «Ветер» будет играть с одной из оставшихся команд, которую обозначим A. По силе команда A может располагаться на одном из 25-ти мест, отмеченных квадратиком:

$$\square < x_1 < \square < x_2 < \square < x_3 < \square < \ldots < \square < x_{23} < \square < \text{«Ветер»} < \square.$$

Команда «Ветер» выиграет в 24-й игре, если команда A по силе займёт одно из 24-х мест, предшествующих команде «Ветер». По классическому определению искомая вероятность равна $\dfrac{24}{25} = 0{,}96$.

Ответ: 0,96.

Решение 2

В предыдущих 23 раундах команда «Ветер» победила, значит, она оказалась сильнее каких-то 23 команд.

В 24-м раунде команда «Ветер» может сыграть с любой из оставшихся команд.

По силе эта команда может расположиться на любом месте среди 24 команд (23 команды, которые уже победила команда «Ветер» и сама команда «Ветер»). Всего 25 вариантов. При этом только в одном случае эта команда будет сильнее «Ветра».

Значит, вероятность того, что «Ветер» победит в 24 раунде равна

$$\frac{25-1}{25}=\frac{24}{25}=0{,}96.$$

Ответ: 0,96.

5 Турнир по футболу проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует чётное число команд, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если число команд нечётно, то с помощью жребия выбираются случайные игровые пары, а одна команда остаётся без пары и не участвует в туре. Проигравшая в каждой паре команда (в случае ничьей проводятся серии пенальти до победы одного из участников) выбывает из турнира, а победители и команда без пары, если она есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся две команды, которые играют между собой финальный тур, то есть последний матч, который выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует 20 команд, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждой команды равна 0,5. Среди игроков две команды из Ставрополя «Факел» и «Пламя». Определите вероятность того, что каком-то туре им придётся сыграть друг с другом.

Решение 1

Рассмотрим два события:

A — «Команда „Факел“ прекратила участие в турнире, проиграв „Пламени“»;

B — «Команда „Пламя“ прекратила участие в турнире, проиграв „Факелу“».

Эти два события несовместны. $\boxed{\text{Искомая вероятность равна } P(A \cup B) = P(A) + P(B).}$

Найдём $P(A)$. Рассмотрим две гипотезы:
H_1 — «„Факел“ выиграл турнир»,
H_2 — «„Факел“ не выиграл турнир» (эти гипотезы являются противоположными событиями).

$P(H_1) = \frac{1}{20}$, так как каждая из 20 команд-участников имеет по условию равные шансы на победу в турнире.

Отсюда $P(H_2) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$.

$P(A|H_1) = 0 \qquad P(A|H_2) = \frac{1}{19}$ („Факел“ мог проиграть любой из 19 команд, а проиграл „Пламени“)

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = 0 + \frac{1}{19} \cdot \frac{19}{20} = \frac{1}{20}.$$

$P(B) = P(A) = \frac{1}{20}$. Искомая вероятность равна $\frac{1}{20} + \frac{1}{20} = 0{,}1$.

Ответ: 0,1.

Решение 2

1. Если бы каждая команда играла с каждой, то число игр было бы равно $\dfrac{20 \cdot 19}{2} = 190$. Но игр в турнире меньше, так как проигравшие команды покидают турнир.

2. В этом турнире всего $10 + 5 + 2 + 1 + 1 = 19$ игр, причём в каждой из них могут встретиться команды «Факел» и «Пламя».

3. По формуле классической вероятности вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придётся сыграть друг с другом, равна $\dfrac{19}{190} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$.

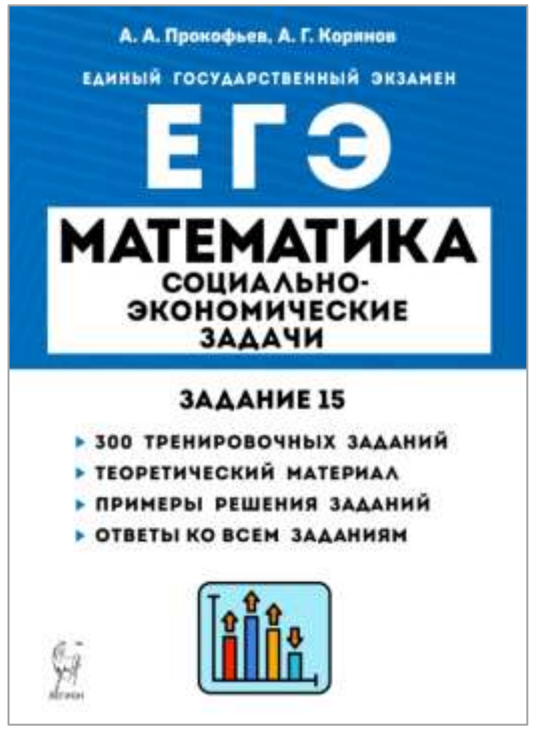
Ответ: 0,1.

ЕГЭ. Теория вероятностей

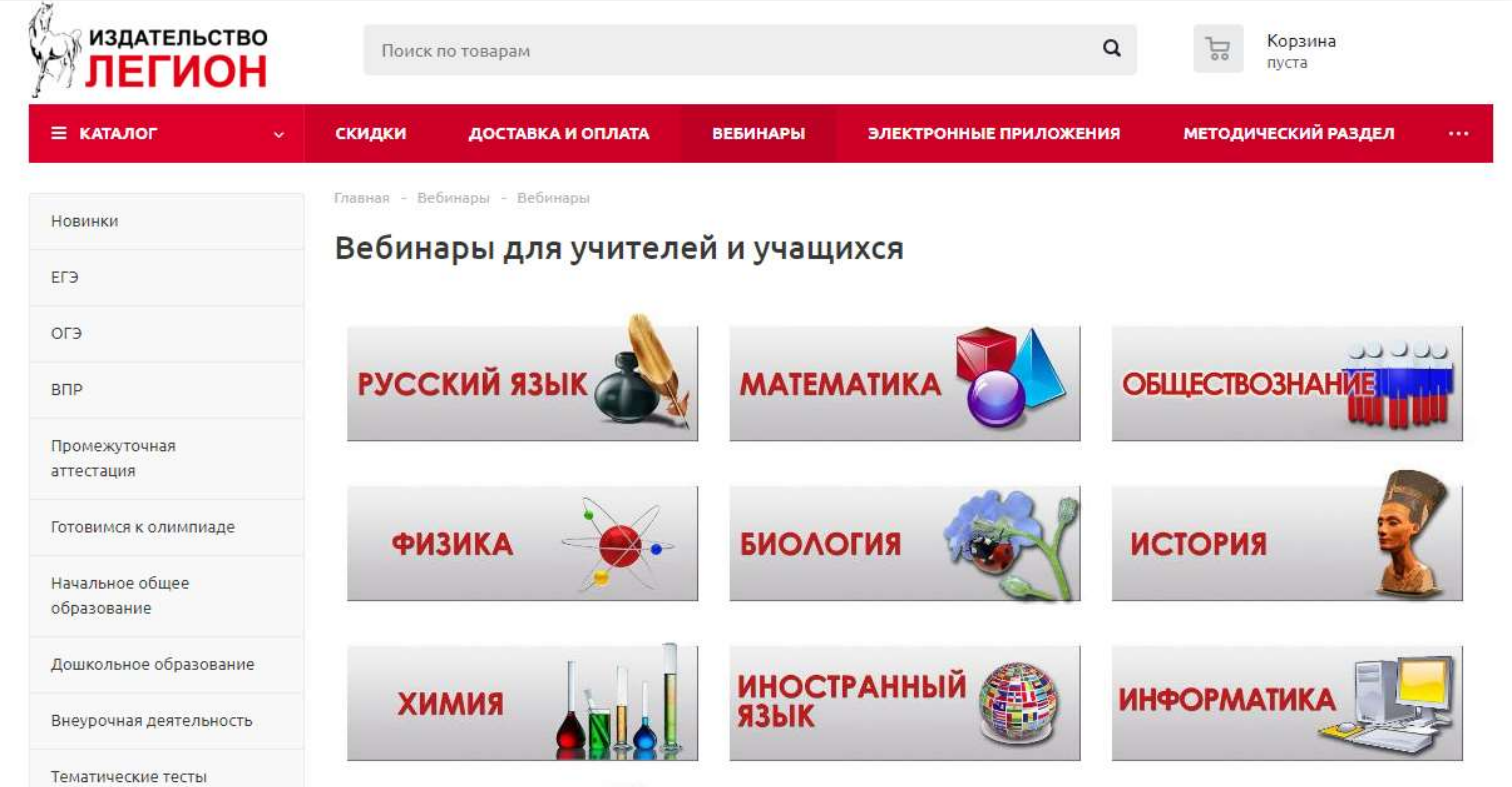
ЕГЭ. Математика

+

+



Бесплатные вебинары, именные сертификаты на www.legionr.ru



Где купить?

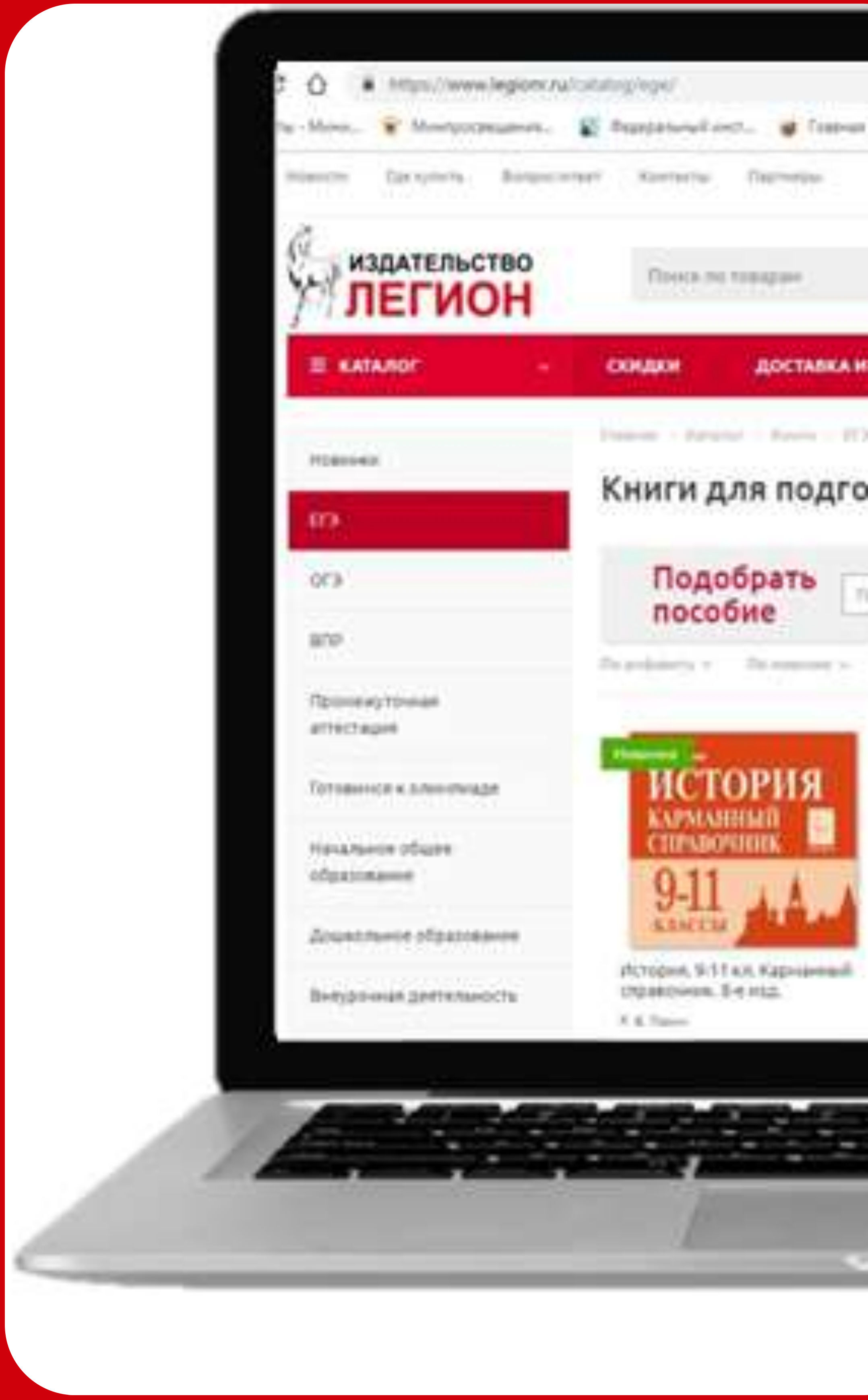
- **Официальный интернет-магазин издательства «Легион» www.legionr.ru**

  Оплата наличными, банковским переводом, при получении. Доставка «Почтой России» или транспортной компанией. Скидки. Бесплатная доставка при заказе от 1500 руб.

- **Интернет-магазины**

  www.ozon.ru, www.labirint.ru

- **Книжные магазины города**



ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН